

المحور س

الدورة الأولى

الهندسة

- 3..... مبرهنة طاليس
6..... مبرهنة فيثاغورس
7..... الحساب المثلثي
9..... الزوايا المحيطية والمركزية
11..... المثلثات المتقايسة

الجبر

- 13..... الجذور المربعة
15..... المتطابقات الهامة
17..... القوى
20..... الترتيب والعمليات

الدورة الثانية

الجبر

- 23..... المعادلات والمترجمات
26..... الدوال التالفية والخطية
29..... النظم

الهندسة

- 32..... الإزاحة والمتجهات
35..... إحداثيتا نقطة – إحداثيتا متجهة
38..... معادلة مستقيم
41..... الهندسة الفضائية

أنشطة مبيانية وإحصائية

- 43..... الإحصاء

مبرهنة طاليس

1-مبرهنة طاليس المباشرة

مبرهنة

ليكن (D_1) و (D_2) مستقيمان متقاطعان في A
 B و M نقطتان من (D_1) مختلفتان عن A . C و N نقطتان من (D_2) مختلفتان عن A
 إذا كان المستقيمان (BC) و (MN) متوازيان فإن :

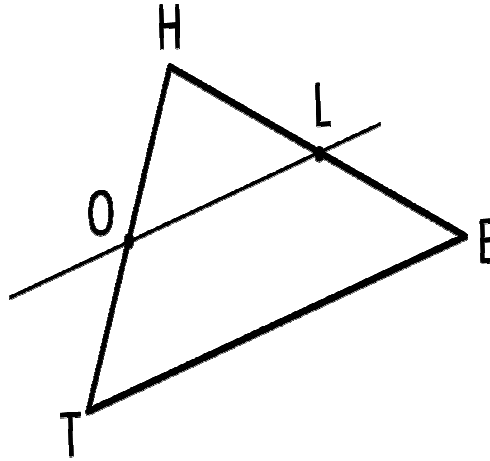
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

مثال 1

في الشكل أسفله $(OL) \parallel (TE)$

نعطي $HE=5\text{cm}$, $HL=2\text{cm}$, $TE=7\text{cm}$, $HO=3\text{cm}$

لنحسب OL و HT :



في المثلث HTE : $(OL) \parallel (TE)$, $L \in [HE]$, $O \in [HT]$
 حسب مبرهنة طاليس المباشرة لدينا :

$$\frac{OH}{HT} = \frac{HL}{HE} = \frac{OL}{TE}$$

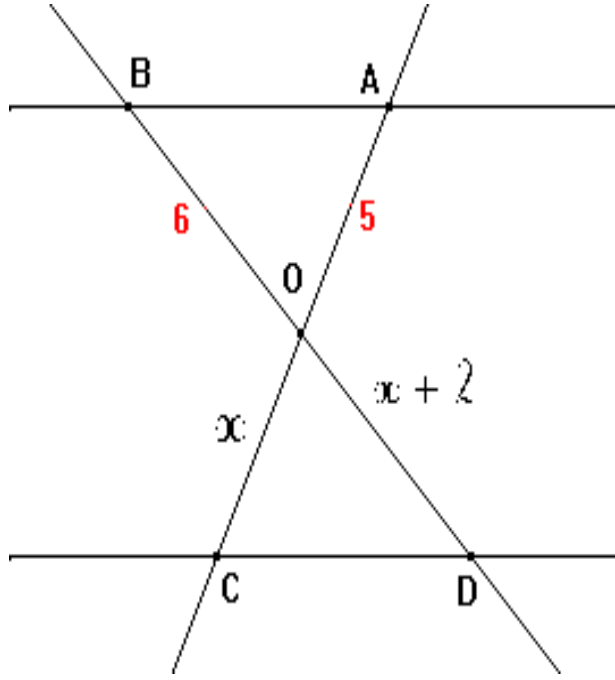
$$\frac{3}{HT} = \frac{2}{5} = \frac{OL}{7} \quad \text{يعني}$$

$$HT = \frac{3 \times 5}{2} = 7,5 \quad \text{إذن} \quad 2 \times HT = 3 \times 5 \quad \text{يعني}$$

$$OL = \frac{2 \times 7}{5} = 2,8 \quad \text{إذن} \quad 5 \times OL = 2 \times 7 \quad \text{يعني}$$

مثال 2

$OA = 5$ و $OB = 6$ و $(AB) \parallel (CD)$ لنحسب x :



لدينا $(AB) \parallel (CD)$ حسب مبرهنة طاليس ادن

$$\frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC} = \frac{BA}{DC}$$

$$\frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC}$$

ومنه

التطبيق العددي :

$$\frac{6}{x + 2} = \frac{5}{x}$$

$$5(x + 2) = 6x$$

$$5x + 10 = 6x$$

$$5x - 6x = -10$$

$$-x = -10$$

$$x = 10$$

ملاحظة : تستعمل مبرهنة طاليس المباشرة لحساب الاطوال

2- مبرهنة طاليس العكسية

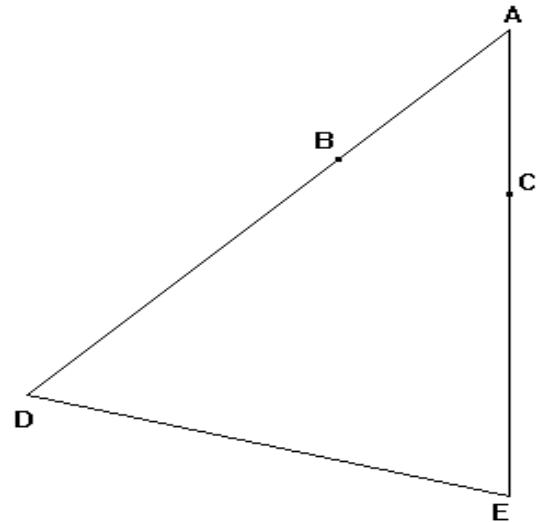
مبرهنة

- ليكن (D) و (D') مستقيمين متقاطعين في A .
- B و N نقطتين من (D) مختلفتين عن A .
- C و B نقطتين من (D') مختلفتين عن A .
- إذا كانت النقط A و B و M في نفس ترتيب النقط A و C و N .
- إذا كان : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ فإن : $(BC) \parallel (MN)$

مثال

AB = 3 و AC = 2,4
AD = 8 و AE = 6,4

لنبين أن : $(BC) \parallel (DE)$



$$\text{لدينا : } \frac{AB}{AD} = \frac{3}{8} \text{ و } \frac{AC}{AE} = \frac{2,4}{6,4} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$$

$$\text{ادن : } \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

ولدينا النقط A و B و D في نفس الترتيب النقط A و C و E
حسب مبرهنة طاليس العكسية فإن : $(BC) \parallel (DE)$

مبرهنة فيثاغورس

1- مبرهنة فيثاغورس المباشرة

المبرهنة

في كل مثلث قائم الزاوية، مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي ضلعي.

مثال

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث : $AB = 3 \text{ cm}$ و $BC = 5 \text{ cm}$

لنحسب AC

لدينا حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ اذن

$$AC^2 = BC^2 - AB^2$$

$$AC^2 = 5^2 - 3^2$$

$$AC^2 = 25 - 9$$

$$AC^2 = 16$$

و بما أن AC عدد موجب فإن : $AC = 4$

2- مبرهنة فيثاغورس العكسية

مبرهنة

إذا كان مجموع مربعي ضلعين في مثلث يساوي مربع طول الضلع الثالث، فإن المثلث قائم الزاوية

مثال

EFG مثلث بحيث : $CG = 6$ و $FG = 8$ و $EF = 10$

لنبين أن EFG مثلث قائم الزاوية .

لدينا :

$$EF^2 = 10^2 = 100$$

$$EG^2 + FG^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

$$EF^2 = EG^2 + FG^2 : \text{ إذن}$$

وحسب مبرهنة فيثاغورس العكسية فإن EFG مثلث قائم الزاوية في G

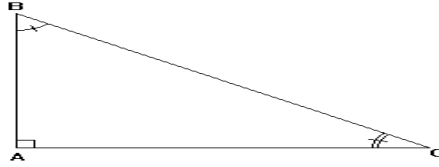
الحساب المثلثي

1- النسب المثلثية

تعريف

- جيب تمام زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية يساوي خارج طول الضلع المجاور للزاوية الحادة على طول الوتر
- جيب زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية يساوي خارج طول الضلع المقابل على طول الوتر
- ظل زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية يساوي خارج طول الضلع المقابل لهذه الزاوية على طول الضلع المجاور لها.

مثال 1



[AB] هو الضلع المجاور للزاوية $\hat{A}BC$ ، والمقابل للزاوية $\hat{A}CB$
[AC] هو الضلع المقابل للزاوية $\hat{A}BC$ ، والمجاور للزاوية $\hat{A}CB$
[CB] هو الوتر

$$\cos \hat{A}CB = \frac{AC}{BC} \quad , \quad \cos \hat{A}BC = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin \hat{A}CB = \frac{AB}{BC} \quad , \quad \sin \hat{A}BC = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan \hat{A}BC = \frac{AC}{AB} \quad , \quad \tan \hat{A}CB = \frac{AB}{AC}$$

مثال 2

ABC مثلث قائم الزاوية في A

بحيث : $BC = 5 \text{ cm}$ و $AB = 3 \text{ cm}$ و $AC = 4 \text{ cm}$

لنحسب النسب المثلثية للزاوية $\hat{A}CB$

$$\cos \hat{A}CB = \frac{4}{5} \quad \text{لدينا :} \quad \cos \hat{A}CB = \frac{AC}{BC} \quad \text{إذن :}$$

$$\sin \hat{A}CB = \frac{3}{5} \quad \text{لدينا :} \quad \sin \hat{A}CB = \frac{AB}{BC} \quad \text{إذن :}$$

لدينا : $\tan A \hat{C} B = \frac{AB}{AC}$ إذن : $\tan A \hat{C} B = \frac{3}{4}$

2- العلاقة بين جيب تمام وجيب وظل زاوية حادة

خاصية

ليكن x قياس زاوية حادة، لدينا : $0 < \sin x < 1$ و $0 < \cos x < 1$
 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$

مثال

لنحسب $\sin x$ و $\tan x$ علما أن : $\cos x = \frac{2}{3}$

لدينا : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

إذن : $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{9-4}{9} = \frac{5}{9}$

لدينا : $0 < \sin x < 1$ إذن : $\sin x = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

لدينا : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ إذن : $\tan x = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

لدينا : $\cos A \hat{C} B = \frac{AC}{BC}$ إذن : $\cos A \hat{C} B = \frac{4}{5}$

لدينا : $\sin A \hat{C} B = \frac{AB}{BC}$ إذن : $\sin A \hat{C} B = \frac{3}{5}$

3- النسب المثلثية لزاويتين متتامتان

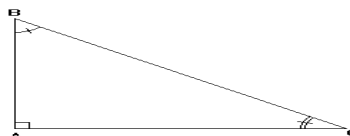
تعريف

إذا كانت زاويتين غير منعكمتين متتامتان، فإن:

- جيب كل منهما يساوي جيب الأخرى
- ظل كل منهما يساوي مقلوب ظل الأخرى.

مثال

ABC مثلث قائم الزاوية في A



$\tan A \hat{B} C = \frac{1}{\tan A \hat{C} B}$ و $\cos A \hat{C} B = \sin A \hat{B} C$ و $\cos A \hat{B} C = \sin A \hat{C} B$

الزوايا المحيطية والمركزية

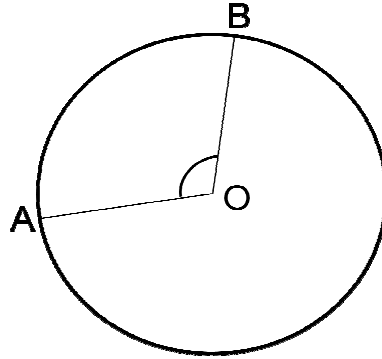
1- الزاوية المحيطية والمركزية

أ- الزاوية المركزية

تعريف

في دائرة، كل زاوية رأسها هو مركز هذه الدائرة، تسمى زاوية مركزية

مثال



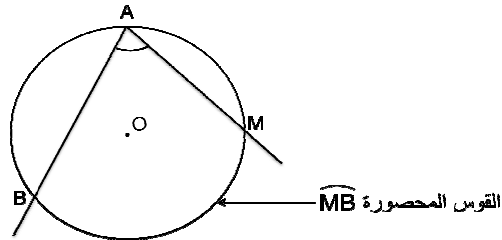
الزاوية $\hat{AOB}$ مركزية تحصر القوس $\widehat{AB}$

ب- الزاوية المحيطية

تعريف

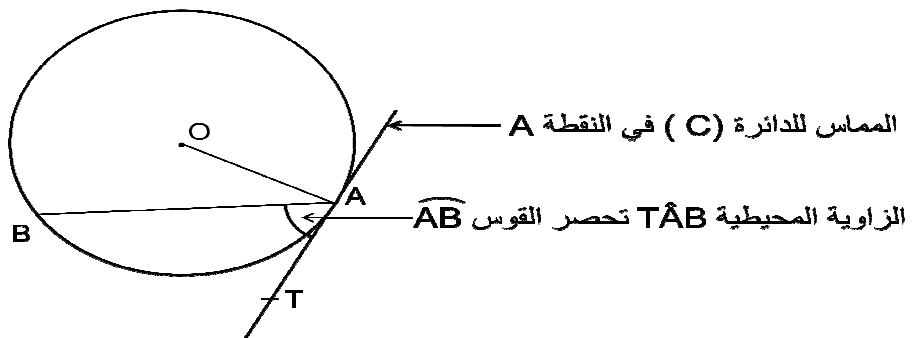
كل زاوية رأسها ينتمي إلى دائرة وتحصر قوسا في هذه الدائرة، تسمى زاوية محيطية

مثال



الزاوية $\hat{MAB}$ تسمى زاوية محيطية وتحصر القوس $\widehat{MB}$

ج- حالة خاصة

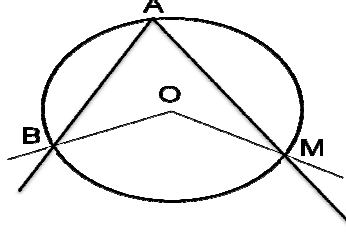


2- الزاوية المحيطية المرتبطة بالزاوية المركزية

تعريف

في دائرة ، نقول عن زاوية محيطية أنها مرتبطة بزاوية مركزية إذا كانتا تحصران نفس القوس

مثال

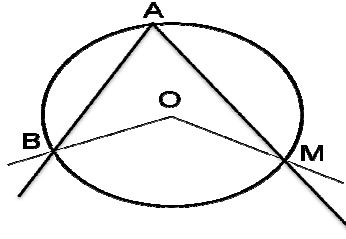


الزاوية المحيطية $B\hat{A}M$ مرتبطة بالزاوية المركزية $B\hat{O}M$

خاصية

في دائرة قياس الزاوية المركزية يساوي ضعف قياس الزاوية المحيطية المرتبطة بها

مثال



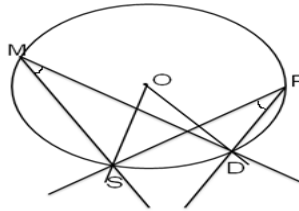
$$B\hat{O}M = 2B\hat{A}M$$

3- العلاقة بين زاويتين محيطيتين تحصران نفس القوس

خاصية

في دائرة، الزاويتان المحيطيتان اللتان تحصران نفس القوس ، تكونا متقايستين

مثال



$$B\hat{A}M = \frac{1}{2} B\hat{O}M \quad ,, \quad S\hat{M}D = S\hat{P}D$$

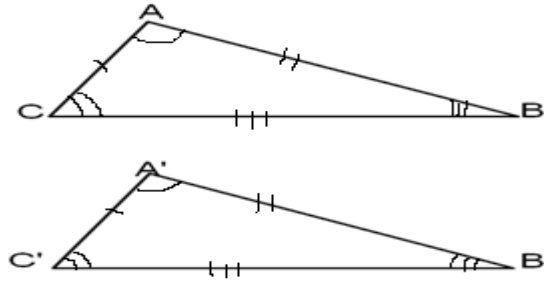
المثلثات المتقايسة

1- مثلثان متقايسان

تعريف

مثلثان متقايسان هما مثلثان قابلان للتطابق

مثال



الضلعان $[AB]$ و $[A'B']$ يسميان ضلعان متناظران

الزاويتان $\hat{BAC}$ و $\hat{B'A'C'}$ تسميان زاويتان متناظرتان

نتيجة

إذا كان مثلثان متقايسين فإن أضلاعهما متناظرة متقايسة وزواياهما المتناظرة متقايسة

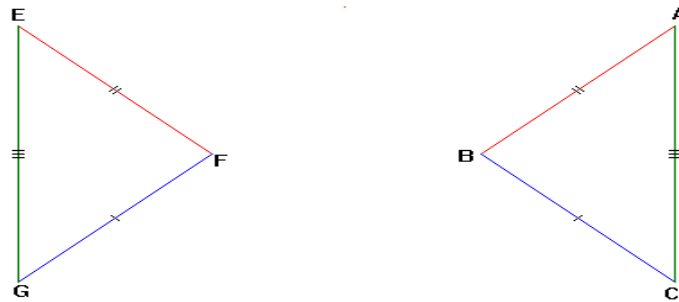
2- حالات التقايس

خاصية 1

إذا قايست أضلاع مثلث على التوالي أضلاع مثلث آخر فإن هذين المثلثين متقايسان

مثال

نعتبر EFG و ABC مثلثين بحيث : $AB = EF$ و $AC = EG$ و $BC = FG$



نقول أن المثلثين EFG و ABC متقايسان

خاصية 2

إذا قايِس ضلعان في مثلث و الزاوية المحصورة بينهما على التوالي ضلعان في مثلث آخر و الزاوية المحصورة بينهما فإن هذين المثلثين متقايسان

مثال

نعتبر ABC و EFG مثلثين بحيث : $AC = EG$ و $EF = AB$ و $\hat{BAC} = \hat{FEG}$



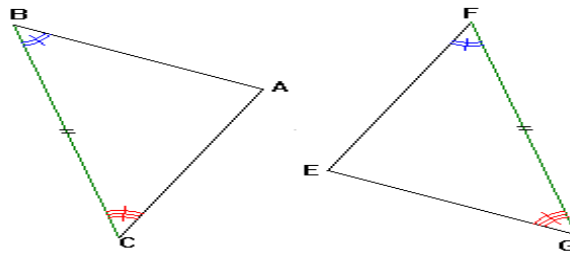
المثلثين ABC و EFG متقايسان

خاصية 3

إذا قايست زوايتان لمثلث و الضلع المحاذي لهما على التوالي زوايتان لمثلث آخر و الضلع المحاذي لهما فإن هذين المثلثين متقايسان

مثال

نعتبر ABC و EFG مثلثين بحيث : $BC = FG$ و $\hat{ACB} = \hat{EGF}$ و $\hat{ABC} = \hat{EFG}$



المثلثين ABC و EFG متقايسان

الجذور المربعة

1- الجذر المربع لعدد حقيقي

تعريف

a عدد حقيقي موجب، العدد x الذي مربعه a يسمى الجذر المربع للعدد a . ونرمز له بالرمز:

$$\sqrt{a}$$

$$x = \sqrt{a} \quad \text{يعني أن} \quad x^2 = a$$

مثال

$$x = \sqrt{11} \quad \text{يعني أن} \quad x^2 = 11$$

ملاحظة

إذا كان a عددا حقيقيا فان : $\sqrt{a^2} = a$
إذا كان a عددا حقيقيا موجبا فان : $(\sqrt{a})^2 = a$

أمثلة

$$\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4 \quad , , \quad \sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$$

2- العمليات على الجذور المربعة

خاصية

a و b عددان حقيقيان موجبان و b غير منعدم

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

أمثلة

$$\sqrt{12} = \sqrt{3 \times 4} = \sqrt{3} \times \sqrt{4} = \sqrt{3} \times \sqrt{2^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{1^2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{1}{2}$$

3- حذف الجذر المربع من المقام

خاصية 1

a عدد حقيقي موجب و $a \neq 0$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

مثال

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

خاصية 2

a و b عدنان حقيقيان موجبان بحيث: $a \neq 0$ و $a \neq b$

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

مثال

$$\frac{2}{1 - \sqrt{5}} = \frac{2(1 + \sqrt{5})}{(1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})} = \frac{2(1 + \sqrt{5})}{1^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{2(1 + \sqrt{5})}{1 - 5} = \frac{2(1 + \sqrt{5})}{-4}$$

ملاحظة: مرافق العدد $(1 + \sqrt{5})$ هو العدد $(1 - \sqrt{5})$

المتطابقات الهامة

1-النشرو التعميل

تعريف

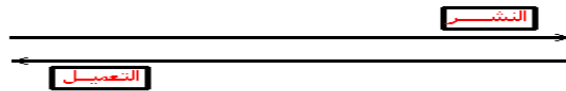
- النشر هو كتابة مجموع أو فرق على شكل جداء .
- التعميل هو كتابة جداء على شكل مجموع أو فرق .

خاصية 1

إذا كانت a و b و k أعداد حقيقية فإن:

$$k \times (a+b) = k \times a + k \times b$$

$$k \times (a-b) = k \times a - k \times b$$



أمثلة:

لننشر التعبيرين A و B :

$$A = \sqrt{5} \times (x + 2) = \sqrt{5} \times x + \sqrt{5} \times 2 = \sqrt{5}x + 2\sqrt{5}$$

$$B = 2(x - \frac{5}{2}) = 2 \times x - 2 \times \frac{5}{2} = 2x - 5$$

لنعمل التعبيرين A و B :

$$B = \frac{5}{4}x + \frac{25}{8} = \frac{5}{4} \times x + \frac{5}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{4} \times (x + \frac{5}{2})$$

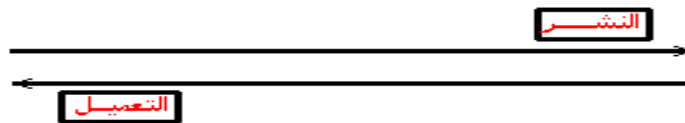
$$A = x^2 - 3x = x \times x - 3 \times x = x(x - 3)$$

خاصية 2

a و b و c و d أعداد حقيقية

$$(a + b)(c + d) = a \times (c + d) + b \times (c + d)$$

$$(a + b)(c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$



أمثلة

لننشر A :

$$\begin{aligned}
 A &= (a + 5)(3 + a) = ax(3 + a) + 5x(3 + a) \\
 &= 3xa + axa + 5x3 + 5xa \\
 &= 3a + a^2 + 15 + 5a
 \end{aligned}$$

لنعمل B :

$$\begin{aligned}
 B &= 2y - 6 + xy - 3x = 2 \times y + 2 \times (-3) + x \times y + x \times (-3) \\
 &= (2 + x)(y - 3)
 \end{aligned}$$

2-المتطابقات الهامة

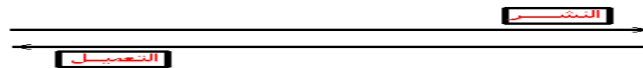
خاصية

a و b عدنان حقيقيان :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$



أمثلة

$$\left(\frac{x}{3} + 2\right)^2 = \frac{x^2}{3^2} + 2 \times \frac{x}{3} \times 2 + 2^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{4x}{3} + 4$$

$$(y - 3)^2 = y^2 - 2 \times 3 \times y + 3^2 = y^2 - 6y + 9$$

$$\left(x + \sqrt{\frac{2}{7}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{2}{7}}\right) = x^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^2 = x^2 - \frac{2}{7}$$

القوى

1- القوى

أ- قوة عدد حقيقي

تعريف

إذا كان x عددا جذريا و n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم فإن :

$$x^n = \underbrace{x \times x \times x \times x \times x \times x \times \dots \times x}_n$$

أمثلة

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 ; (-4)^5 ; \left(\frac{12}{5}\right)^2$$

ملاحظة

n عدد صحيح طبيعي و a عدد حقيقي غير منعدم

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

أمثلة

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$$

$$(\sqrt{15})^{-2} = \frac{1}{\sqrt{15}^2} = \frac{1}{15}$$

ب- إشارة عدد حقيقي

قاعدة

تكون إشارة قوة عدد حقيقي سالبة إذا كان الأساس سالبا و الأس فرديا، وتكون موجبة في جميع الحالات الأخرى

أمثلة

إشارة هذه القوة $(-3)^8$ موجبة

إشارة هذه القوة $(-5.7)^5$ سالبة

2- خصائص القوى

خصائص

a و b عدنان حقيقيان غير منعدمين .

m و n عدنان صحيحان نسبيا .

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$a^n \times b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

أمثلة

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{11} \left(-\frac{2}{3}\right)^{53} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{11+53} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{64}$$

$$\left(\frac{-5}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{-5}{3} \times \frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{-5}{6}\right)^4$$

$$\frac{\left(\frac{2}{7}\right)^6}{\left(\frac{3}{5}\right)^6} = \left(\frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{5}}\right)^6 = \left(\frac{2}{7} \times \frac{5}{3}\right)^6 = \left(\frac{10}{21}\right)^6$$

$$\frac{22^5}{22^{12}} = 22^{5-12} = 22^{-7} = \frac{1}{22^7}$$

$$\left[\left(\frac{5}{7}\right)^5\right]^{-3} = \left(\frac{5}{7}\right)^{5 \times (-3)} = \left(\frac{5}{7}\right)^{-15} = \left(\frac{7}{5}\right)^{15}$$

3- قوى العدد 10

قاعدة

n عدد صحيح طبيعي

$$10^n = 1000.....0$$

n من الازفار

$$10^{-n} = 0,000.....01$$

n من الازفار

أمثلة

$$10^5 = 100000$$

$$10^{-5} = 0,00001$$

4- الكتابة العلمية

تعريف

- الكتابة العلمية لعدد عشري موجب هي كتابته على شكل:

$a \times 10^n$ حيث: n عدد صحيح نسبي و a عدد عشري حيث :

$$1 \leq a < 10$$

- الكتابة العلمية لعدد عشري نسبي سالب هي كتابته على شكل:

$-a \times 10^n$ حيث n عدد صحيح نسبي و a عدد عشري بحيث :

$$1 \leq a < 10$$

أمثلة

$$2650000 = 2,65 \times 10^6$$

$$-2650000 = -2,65 \times 10^6$$

$$0,00026 = 2,6 \times 10^{-4}$$

الترتيب والعمليات

1- مقارنة عددين حقيقيين

خاصية

لمقارنة عددين حقيقيين a و b : نحدد إشارة فرقهما
إذا كان $a - b \geq 0$ فإن $a \geq b$
إذا كان $a - b \leq 0$ فإن $a \leq b$

مثال

لنقارن العددين : 9 و $\frac{3}{7}$

لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{3}{7} - 9 &= \frac{3}{7} - \frac{63}{7} \\ &= \frac{-60}{7}\end{aligned}$$

إذن : $\left(\frac{3}{7} - 9\right) \leq 0$ و منه فإن $\frac{3}{7} \leq 9$

2- الترتيب والعمليات

أ- الترتيب والجمع

خاصية

m و k و b و a أعداد حقيقية
إذا كان $a \leq b$ فإن $a + k \leq b + k$
إذا كان $a \leq b$ فإن $a - k \leq b - k$

مثال

a و b عددين حقيقيين بحيث $a + 4 \leq b$

لنبين أن : $a + 1 \leq b - 3$

لدينا : $a + 4 \leq b$ يعني أن $a + 4 - 3 \leq b - 3$

أي $a + 1 \leq b - 3$

خاصية

d و c و b و a أعداد حقيقية .

إذا كان $\left. \begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq d \end{array} \right\}$ فإن $a + c \leq b + d$

مثال

و $a + 3 \leq b$ و a و b عددين حقيقيين بحيث :

$$b + 4 \leq \sqrt{2}$$

بين أن : $b+a+7 \leq 3+\sqrt{2}$

إذن : $(b+4)+(a+3) \leq \sqrt{2}+3$ نعلم أن : $\left. \begin{array}{l} b+4 \leq \sqrt{2} \\ a+3 \leq 3 \end{array} \right\}$ و

و منه فإن : $b+a+7 \leq \sqrt{2}+3$

ب-الترتيب والضرب خاصية

a و k و b أعداد حقيقية

1/ إذا كان $a \leq b$ فإن $a \times k \leq b \times k$: $\left. \begin{array}{l} a \leq b \\ k \geq 0 \end{array} \right\}$ و

2/ إذا كان $a \leq b$ فإن $a \times k \geq b \times k$: $\left. \begin{array}{l} a \leq b \\ k \leq 0 \end{array} \right\}$ و

مثال

a و b عددان جذريان بحيث : $b \geq \sqrt{3}$ و $a \geq \frac{4}{3}$

لنستنتج $3a$ و $-2b$

إذن : $3a \geq 4$ لدينا : $\left. \begin{array}{l} a \geq \frac{4}{3} \\ 3 \geq 0 \end{array} \right\}$ و أي : $a \times 3 \geq \frac{4}{3} \times 3$

$-2b \leq -2\sqrt{3}$ و لدينا : $\left. \begin{array}{l} b \geq \sqrt{3} \\ -2 \leq 0 \end{array} \right\}$ و أي : $b \times (-2) \leq \sqrt{3} \times (-2)$

إذن : $-2b \leq -2\sqrt{3}$

3- التآطير

خاصية 1

a و t و z و y و x و b أعداد حقيقية بحيث :

$$x \leq a \leq y \quad \text{و} \quad z \leq b \leq t$$

$$x+z \leq a+b \leq y+t$$

مثال

x و y عددان حقيقيان بحيث : $-4 \leq y \leq \frac{-3}{2}$ و $1 \leq x \leq \sqrt{5}$

لنؤطر : $x+y$

لدينا : $1 \leq x \leq \sqrt{5}$ و $-4 \leq y \leq \frac{-3}{2}$

يعني أن : $1 + (-4) \leq x + y \leq \sqrt{5} + \left(\frac{-3}{2}\right)$

أي : $-3 \leq x + y \leq \sqrt{5} - \frac{3}{2}$

خاصية 2

a و y و x أعداد حقيقية بحيث : $x \leq a \leq y$
 $-y \leq -a \leq -x$

مثال

x عدد حقيقي بحيث : $\sqrt{3} \leq x \leq 4$

لنؤطر $-x$: $-4 \leq -x \leq -\sqrt{3}$

خاصية 3

a و t و z و y و x و b أعداد حقيقية بحيث :

$x \leq a \leq y$ و $z \leq b \leq t$

$x - t \leq a - b \leq y - z$

مثال

x و y عدنان حقيقيان بحيث : $1 \leq x \leq \frac{5}{2}$ و $-4 \leq y \leq \frac{-3}{2}$

لنؤطر : $y - x$

لدينا : $1 \leq x \leq \frac{5}{2}$ إذن : $-\frac{5}{2} \leq -x \leq -1$

يعني أن : $(-4) + \left(\frac{-5}{2}\right) \leq y + (-x) \leq \left(\frac{-3}{2}\right) + (-1)$

$-\frac{13}{2} \leq y - x \leq \left(\frac{-5}{2}\right)$

المعادلات والمتراجحات

1- تعريف

ليكن a و b عددين حقيقيين معلومين. كل متساوية على شكل $a + x = b$ أو $ax = b$ حيث $(x \neq 0)$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد x .
قيمة x التي تحقق المعادلة تسمى حلاً للمعادلة.

أمثلة

$$\frac{11}{3} + x = 22 ; -5 + x = 10 ; \frac{x}{5} - 2 = -8$$

2- حل المعادلة من نوع : $a + x = b$

قاعدة

أو b عدنان حقيقيان
حل المعادلة $a + x = b$ هو العدد : $b - a$

أمثلة

$$\text{لنحل المعادلة: } \frac{3}{5} + x = 22$$

$$\text{أي: } x = 22 - \frac{3}{5}$$

$$\text{أي: } x = \frac{110}{5} - \frac{3}{5} = \frac{110-3}{5}$$

$$\text{أي: } x = \frac{107}{5}$$

$$\text{ادن حل المعادلة هو: } \frac{107}{5}$$

3- حل المعادلة $ax = b$ ($a \neq 0$):

قاعدة

أو b عدنان حقيقيان ($a \neq 0$)
حل المعادلة $ax = b$ هو العدد : b/a

مثال

$$\text{لنحل المعادلة: } \frac{-11}{3}x = 88$$

$$\text{أي: } x = 88 \div \left(\frac{-11}{3}\right)$$

$$\text{أي: } x = \frac{88}{1} \times \left(\frac{-3}{11}\right)$$

ادن حل المعادلة هو : $\frac{-264}{11}$

4- حل معادلة من نوع : $(ax+b)(cx+d)=0$

خاصية

ليكن A و B عددين حقيقيين
 $A \times B = 0$ يعني $A=0$ أو $B=0$ يعني

مثال :

حل المعادلة : $(2x+4)(-3x-5)=0$

المعادلة $(2x+4)(-3x-5)=0$ تكافئ على التوالي :

$$2x+4=0 \quad \text{أو} \quad -3x-5=0$$

$$2x=-4$$

$$-3x=5$$

$$x=\frac{-4}{2}$$

$$\text{أو} \quad x=\frac{5}{-3}$$

$$x=-2$$

إذن للمعادلة حلين هما : $\frac{5}{-3}$ و -2

$$x = 140 \times \frac{4}{5} \quad \text{ادن:}$$

$$x = 112 \quad \text{ادن:}$$

حل المعادلة هو: 112

- حل المسألة هو: ثمن المحفظة هو: 112 درهم

$$140 - 112 = 28 \text{ DH} \quad \text{ثمن الكتاب هو:}$$

5- المتراجحات

أ- تعريف

كل تعبير على شكل : $ax + b \leq 0$ حيث a و b عددان حقيقيان معلومان يسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد.
- العدد x يسمى مجهولاً .
- التعابير التالية : $ax + b > 0$; $ax + b \geq 0$; $ax + b < 0$ هي أيضاً متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد.

أمثلة

$$24,5 < 1-x \quad ,, \quad -5 \geq 2x+1 \quad ,, \quad 7x - \frac{1}{2} \leq 5$$

ب- حل المتراجحة :

مثال

لدينا : $2x + 7 > 15$

يعني : $2x + 7 + (-7) > 15 + (-7)$

$$\text{أي : } 2x > 8$$

نضرب طرفي المتفاوتة في العدد الموجب $\frac{1}{2}$ أي $2x \times \frac{1}{2} > 8 \times \frac{1}{2}$

$$\text{إذن } x > 4$$

حلول المترابحة هي الأعداد الأكبر قطعاً من 4

6- مراحل حل المسألة

لحل المسألة نتبع المراحل الآتية:

- قراءة المسألة بتمعن.
- اختيار المجهول.
- صياغة المعادلة.
- حل المعادلة.
- التحقق من صحة الحل المحصل عليه.
- كتابة الحل باستعمال العبارة: "حل المسألة هو:"

مثال

اشترى أحمد كتاب و محفظة بما قدره 140 درهم اذا علمت أن ثمن الكتاب يمثل ربع ثمن المحفظة فما هو ادن ثمن كل من الكتاب و المحفظة.

- اختيار المجهول: ليكن x ثمن المحفظة

ادن $x/4$ هو ثمن الكتاب.

- صياغة المعادلة: بما أن المبلغ الذي دفعه أحمد هو 140 درهم

$$\text{فان: } x + x/4 = 140$$

$$x + x/4 = 140$$

- حل المعادلة: لدينا

$$x (1 + \frac{1}{4}) = 140 \quad \text{ادن:}$$

$$x \times \frac{5}{4} = 140 \quad \text{ادن:}$$

$$x = 140 \div \frac{5}{4} \quad \text{ادن:}$$

الدالة الخطية – الدالة التالفية

1- الدالة الخطية

أ- تعريف

a عدد معلوم
العلاقة التي تربط العدد x بالعدد ax تسمى دالة خطية معاملها هو a
العدد ax يسمى صورة x بالدالة الخطية التي نرمز لها بالرمز: f
ونكتب: $f(x) = ax$
($f(x)$ هي صورة بالدالة الخطية)

مثال

$$f(x) = -2x \text{ دالة خطية معاملها هو } -2$$

خاصية

f دالة خطية معاملها **a**
إذا كان x و x' عددين معلومين غير منعدمين فإن :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x')}{x'} = a$$

مثال

$$f \text{ دالة خطية بحيث : } f(-5) = \frac{2}{3}$$

لنحدد معامل الدالة f ثم حدد $f(x)$.

f دالة خطية إذن : $f(x) = ax$ ومعاملها هو العدد الحقيقي :

$$a = \frac{f(-5)}{-5} = \frac{\frac{2}{3}}{-5} = \frac{2}{3} \times \frac{-5}{1} = \frac{-10}{3}$$

$$\text{و منه فإن : } f(x) = \frac{-10}{3}x$$

ب- التمثيل المبياني للدالة الخطية

تعريف

$(O; I; J)$ معلم متعامد في المستوى
تمثيل المبياني لدالة خطية هو مستقيم يمر من أصل المعلم O

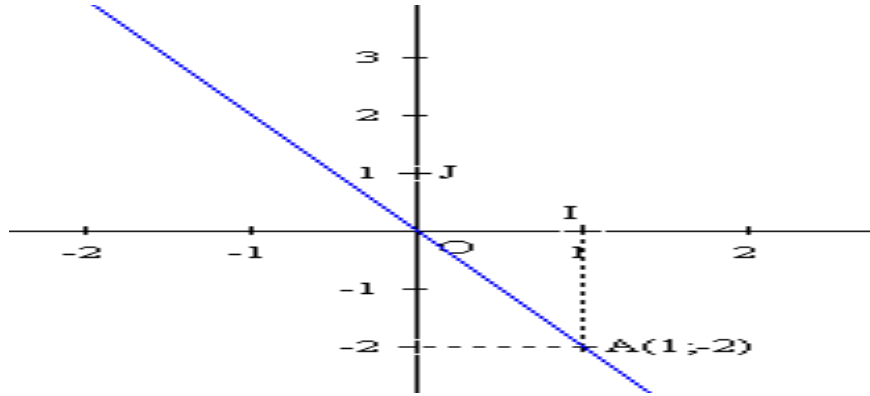
مثال

$$f(x) = -2x \text{ دالة خطية معاملها هو } -2$$

لننشئ التمثيل المبياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; I; J)$.

x	1
$f(x)$	-2

إذن التمثيل المبياني للدالة هو المستقيم من O و من النقطة $A(1;-2)$.



2- الدالة التالفية

أ- تعريف

عدان حقيقيان معلومان a و b .
العلاقة f التي تربط كل عدد حقيقي x بالعدد $ax+b$ تسمى دالة تالفية معاملها a و نكتب :

$$f(x) = ax+b$$

العدد $ax+b$ هو صورة x بالدالة f

مثال

$$f(x) = -3x + 11 \quad . \quad f \text{ دالة تالفية معاملها } -3$$

ب- التمثيل المبياني للدالة التالفية

خاصية

في معلم $(O;I;J)$ ، التمثيل المبياني لدالة تالفية f هو مستقيم يمر من النقط $M(x;f(x))$

مثال

لننشئ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$ الدالة التالفية f

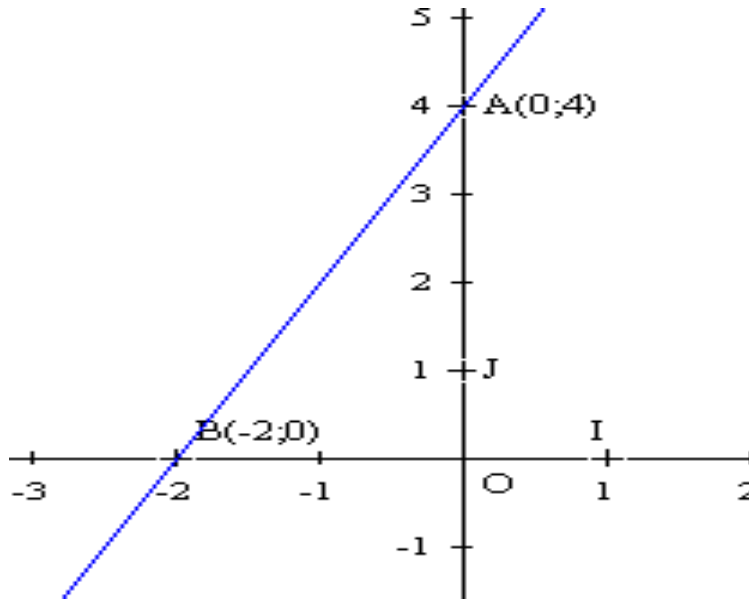
$$f(x) = 2x + 4 \quad \text{بحيث :}$$

لدينا :

x	0	-2
$f(x)$	4	0

إذن التمثيل المبياني للدالة هو المستقيم (AB) بحيث :

$$A(0;4) \quad \text{و} \quad B(-2;0)$$



ج - خاصية

a و b عدنان حقيقيان.

لتكن f دالة تألفية $f(x) = ax + b$

إذا كان x_1 و x_2 عددين معلومين ($x_1 \neq x_2$) فإن:

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

مثال

f دالة تألفية بحيث : $f(1) = -3$ و $f(3) = 2$

حدد معامل الدالة f ثم حدد $f(x)$

لدينا دالة تألفية إذن : $f(x) = ax + b$ و معاملها هو العدد الحقيقي :

$$a = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{2 - (-3)}{3 - 1} = \frac{2 + 3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$f(x) = \frac{5}{2}x + b \text{ ومنه فإن :}$$

لنحسب العدد الحقيقي b
لدينا : $f(1) = -3$ يعني أن

$$\frac{5}{2} \times 1 + b = -3$$

$$\frac{5}{2} + b = -3$$

$$5 + 2b = -6$$

$$2b = -6 - 5$$

$$b = \frac{-11}{2}$$

$$f(x) = \frac{5}{2}x - \frac{11}{2} \text{ وبالتالي فإن :}$$

النظمات

1- نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

تعريف

الكتابة $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ تسمى نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين , و حلها هو تحديد الأزواج (x,y) التي تحقق المتساويتان معا .

أمثلة

$$\begin{cases} \sqrt{5}x + \frac{2}{3}y = 23 \\ -x + \sqrt{2}y = \frac{3}{-5} \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ -2x + 4y = 8 \end{cases}$$

2- الحل الجبري لنظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

أ- طريقة التعويض

$$\begin{cases} 2x + y = 11 & (1) \\ x + 3y = 18 & (2) \end{cases} \quad : (E) \quad : \text{ لنحل النظمة}$$

في المعادلة (1) نحسب x بدلالة y إذن : $y = 11 - 2x$

في المعادلة (2) نعوض y بالقيمة $11 - 2x$ ثم نحسب x

$$x + 3(11 - 2x) = 18$$

$$x + 33 - 6x = 18$$

$$x - 6x = 18 - 33$$

$$-5x = -15$$

$$x = \frac{-15}{-5}$$

$$x = 3$$

و منه فإن :

$$y = 11 - 2 \times 3$$

$$y = 11 - 6$$

$$y = 5$$

و بالتالي الزوج $(3;5)$ هو حل هذه النظمة (E)

ب - طريقة التالفة الخطية

$$\begin{cases} x+4y=10 \\ 3x+7y=25 \end{cases} \quad \text{نعتبر النظام:}$$

نضرب طرفي المعادلة الأولى في 3- وطرفي المعادلة الثانية في 1 :

$$\begin{cases} x+4y=10 \\ 3x+7y=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x-12y=-30 \\ 3x+7y=25 \end{cases} \quad \text{فنحصل على:}$$

ثم نجمع المعادلتين المحصل عليهما طرفا بطرف فنحصل على:

$$\begin{cases} x+4y=10 \\ -3x-12y+3x+7y=-30+25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4y=10 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4 \times 1=10 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$$

نقول أن النظام تقبل حلا وحيدا هو الزوج (6,1)

3- الحل المبياني

تعريف

تعتمد هذه الطريقة على ربط كل من معادلتى النظام بمستقيم ، ثم تحديد زوج إحداثيتي نقطة تقاطعهما (في حالة تقاطعهما) مبيانيا ، وذلك بإنشاء هذين المستقيمين في م.م، حينئذ يكون هذا الزوج هو حل هذه النظام.

مثال

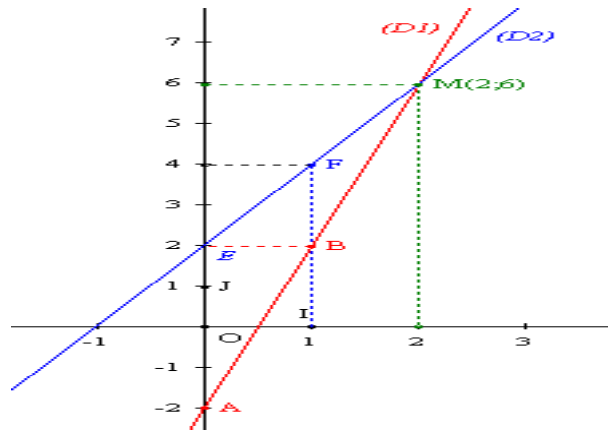
$$(S): \begin{cases} 4x - y - 2 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{لنحل النظام:}$$

لنحدد المعادلة المختصر لكل من المستقيمين (D_1) و (D_2)

$$\begin{cases} (D_1): y = 4x - 2 \\ (D_2): y = 2x + 2 \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

نلاحظ أن المستقيمين (D_1) و (D_2) متقاطعان ليس لهما نفس الميل ، إذن فهما مستقيمان

لننشئ المستقيمين (D_1) و (D_2)



نلاحظ من خلال المبيان أن المستقيمين يتقاطعان في النقطة $M(2;6)$ و بالتالي الزوج $(2;6)$ هو حل النظام (S)

4- حل المسائل

مراحل حل مسألة :

- قراءة نص المسألة جيدا و فهمها.
- اختيار المجهولين الملائمين.
- ترجمة نص المسألة إلى أنظمة.
- حل النظام المحصل عليها.
- الرجوع إلى المسألة.
- التأكد من صحة الحل.

مثال :

نريد موازنة هذه المعادلة الكيميائية التي تمثل احتراق الميثان في الأكسجين :



$$\begin{cases} a \times 1 = c \times 1 \\ a \times 4 = d \times 2 \\ b \times 2 = c \times 2 + d \times 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = c \\ d = 2a \\ 2b = 2c + d \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = c = 1 \\ d = 2 \\ 2b = 2 + 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = c = 1 \\ d = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$



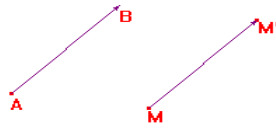
الإزاحة والمتجهات

1- الإزاحة

تعريف

- A و B و M نقط مختلفة من المستوى .
نقول إن النقطة N هي صورة النقطة M بالإزاحة التي تحول A إلى B إذا كان:
- للمستقيمين (AB) و (MN) نفس الاتجاه.
 - المنحى من M نحو N هو المنحى من A نحو B .
 - المسافتان MN و AB متساويتان.

مثال



- النقطة M' هي صورة M بالإزاحة T التي تحول A إلى B يعني أن :
- (AB) و (MM') مستقيمان لهما نفس الإتجاه
 - المنحى من M نحو M' هو المنحى من A إلى B
 - $MM' = AB$

خاصية

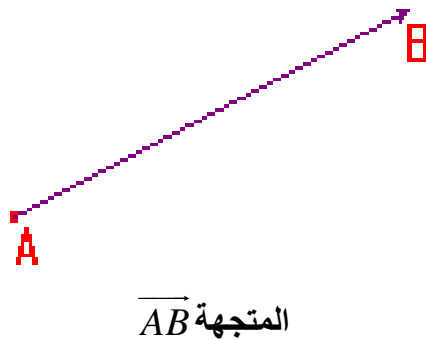
A' و B' صورتا A و B على التوالي بإزاحة يعني أن AA'B'B متوازي أضلاع.

2- المتجهة

أ- تعريف

كل نقطتين مختلفتين A و B في المستوى تحددان متجهة نرسم لها بالرمز : $\overrightarrow{AB}$ حيث أصلها A وطرفها B وحاملها المستقيم (AB) .

مثال



ب- خصائص متجهة

- نعتبر A و B نقطتين مختلفتين. للمتجهة $\overrightarrow{AB}$ اتجاه ولها منحنى ولها معيار (أو منظم) :
- اتجاه المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو اتجاه المستقيم (AB) .
 - ومنحنى المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو من A إلى B .
 - ومعيار (يعني منظم) المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو طول القطعة $[AB]$ يعني المسافة AB

3- تساوي متجهتين

خاصية

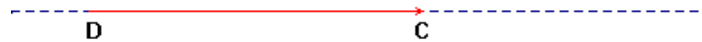
نقول إن متجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متساويتان إذا كانت B و D هما على التوالي صورتا A و C بنفس الإزاحة.

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \quad \text{ونكتب:}$$

نقول أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما :

- نفس الاتجاه .
- نفس المنحنى .
- نفس المعيار (أي المنظم) .

مثال



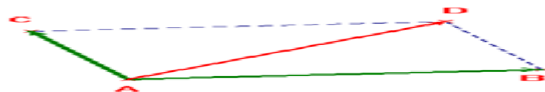
$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$$

3- مجموع متجهتين

خاصية

إذا كان $ABCD$ متوازي أضلاع فإن : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

مثال



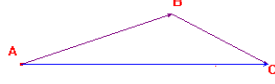
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$$

خاصية (علاقة شال)

إذا كانت ثلاث نقط A و B و C من المستوى فإن :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

مثال



خاصية

مقابل متجهة $\overrightarrow{AB}$ هو المتجهة $\overrightarrow{BA}$ و يكتب $-\overrightarrow{AB}$
 إذن : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

4- ضرب متجهة في عدد حقيقي

تعريف

$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و α عدد حقيقي
 نقول إن المتجهة $\overrightarrow{AC}$ هي جداء المتجهة $\overrightarrow{AB}$ في العدد الحقيقي α إذا كانت C هي نقطة من (AB) ونكتب

- ويكون لـ $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ نفس المنحى في حالة $0 < \alpha$ ولدينا $AC = \alpha AB$
- يكون لـ $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ منحيان متعاكسان في حالة $0 > \alpha$ ولدينا $AC = -\alpha AB$
- تكون C منطبقة مع A في حالة $\alpha = 0$.

مثال

$[AB]$ قطعة و M منتصفها لدينا :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \checkmark \quad \text{و المتجهتين } \overrightarrow{AM} \text{ و } \overrightarrow{AB} \text{ لهما نفس المنحى و } AB = 2AM$$

$$\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{و المتجهتين } \overrightarrow{AN} \text{ و } \overrightarrow{AB} \text{ لهما منحيان متعاكسان}$$

$$\text{و } AN = -\left(-\frac{1}{2}\right)AB$$

خاصية

C و B و A من المستوى
 - تكون النقط C و B و A مستقيمية إذا وفقط إذا كانت $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ بحيث k عدد حقيقي غير منعدم

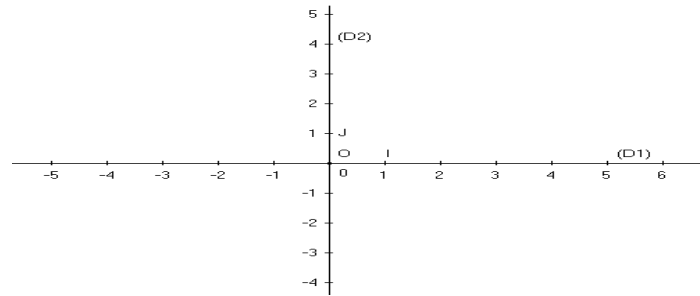
- إذا كان $\overrightarrow{CD} = K\overrightarrow{AB}$ فإن $(AB) \parallel (CD)$

إحداثيتا نقطة – إحداثيتا متجهة

1- إحداثيتا نقطة

أ-مثال

(D1) و (D2) مستقيمين مدرجين متعامدين في النقطة O



ملاحظة

إذا كان $OI = OJ$ نقول أن المستوى منسوب إلى معلم منظم و متعامد

-- نسمي المستقيم (OI): محور الأفاصيل

-- نسمي المستقيم (OJ): محور الأرتاب .

-- نرمز لمعلم في المستوى بالرمز : $(O ; I ; J)$

ب-إحداثيتا نقطة

تعريف

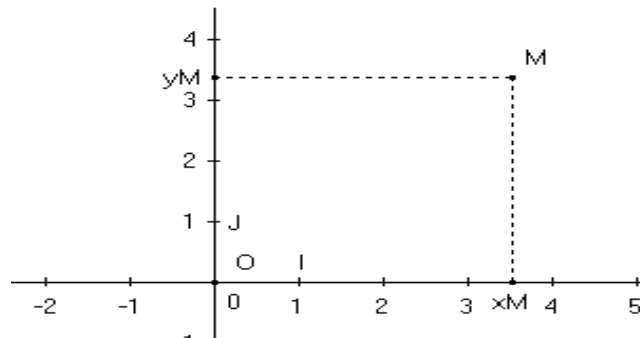
كل نقطة من المستوى M مرتبطة بعددين عشرين نسبين x_M و y_M

يسميان إحداثيتي النقطة M و نكتب : $M(x_M ; y_M)$

x_M يسمى الأفصول

y_M يسمى الأرتوب

مثال



2- احداثيات متجهة

تعريف

إذا كانت $B(x_B; y_B)$ و $A(x_A; y_A)$ فإن: $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

مثال

$B(1; -5)$ و $A(-2; 3)$ نقطتان من المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O; I; J)$

لنحسب إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$

لدينا: $x_B - x_A = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3$ و $y_B - y_A = -5 - 3 = -8$

إذن: $\overrightarrow{AB}(3; -8)$

خاصية

$(O; I; J)$ معلم متعامد للمستوى

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتان غير منعدمتين

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ يعني أن: $y_B - y_A = y_D - y_C$ و $x_B - x_A = x_D - x_C$

مثال

$C(-2; -2)$ و $B(1; -4)$ و $A(3; 3)$ نقط من المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O; I; J)$.

لنحدد إحداثيتي النقطة D لكي يكون ABCD متوازي الأضلاع

ABCD متوازي الأضلاع يعني أن: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

أي $x_B - x_A = x_C - x_D$ و $y_B - y_A = y_C - y_D$

ومنه فإن $-4 - 3 = -2 - y_D$ و $1 - 3 = -2 - x_D$

أي $y_D = -2 + 4 + 3$ و $x_D = -2 - 1 + 3$

إذن: $x_D = 0$ و $y_D = 5$

وبالتالي فإن: $D(0; 5)$

3- احداثيات مجموع متجهتين

خاصية

إذا كان $\overrightarrow{AB} = (a; b)$ و $\overrightarrow{CD} = (c; d)$ فإن $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (a + c; b + d)$

مثال

لنعتبر المتجهتين: $\vec{v}(2; -4)$ و $\vec{u}(-2; 3)$

لنحسب: $\vec{u} + \vec{v}$

لدينا: $\vec{u} + \vec{v}(-2 + 2; 3 - 4)$ أي: $\vec{u} + \vec{v}(0; -1)$

4- احداثيات منتصف قطعة

خاصية

لتكن $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$

إذا كانت النقطة M منتصف $[AB]$ فإن : $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ و $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

مثال

لنحدد إحداثيتي النقطة E منتصف القطعة $[AB]$ بحيث: $B(-2;1)$ و $A(2;3)$

$$x_E = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + (-2)}{2} = \frac{0}{2} = 0 \text{ لدينا}$$

$$\text{و } y_E = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ إذن : } E(0;2)$$

5- المسافة بين نقطتين

خاصية

لتكن $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

مثال

لتكن : $B(3,2)$ و $A(-1;3)$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(3 + 1)^2 + (2 - 3)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{16 + 1} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

معادلة مستقيم

1- المعادلة المختصرة لمستقيم غير مواز لمحور الأرتاب

تعريف

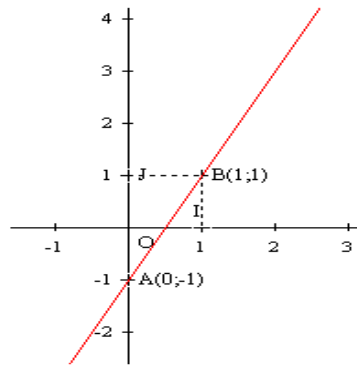
العلاقة $y=ax+b$ التي تميز نقط المستقيم (AB) تسمى معادلة المستقيم (AB) ليكن معلما متعامدا منظم
المعادلة المختصرة لمستقيم (D) غير مواز لمحور الأرتاب هي: $y=ax+b$
العدد a يسمى المعامل الموجه أو ميل المستقيم (D)
العدد b يسمى الأرتوب عند الأصل

مثال

نعتبر (D) مستقيم معادلته المختصرة هي: $y = 2x - 1$:
ميل المستقيم (D) هو العدد 2 ميل المستقيم
الأرتوب عند الأصل هو العدد - 1

لننشئ المستقيم (L) الذي معادلته المختصرة هي: $y = 2x - 1$:

x	0	1
y	-1	1
$M(x; y)$	$A(0; -1)$	$B(1; 1)$



خاصية

إذا كان المستقيم (D) الذي معادلته $y=ax+b$ يمر من نقطتين مختلفتين $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$

فإن المعامل الموجه يساوي: $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ مع $x_B \neq x_A$

مثال

لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) بحيث : $B(-2;3)$ و $A(1;-2)$
 لدينا المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) على شكل : $y = mx + p$:
 لنحدد m :

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-2-3}{1+2} = \frac{-5}{3}$$

$$(AB) : y = \frac{-5}{3}x + p$$

لنحدد p

بما أن النقطة $A(1;-2)$ تنتمي إلى المستقيم (AB) فإن

$$-2 = \frac{-5}{3} \times 1 + p$$

$$-2 = \frac{-5}{3} + p$$

$$p = -2 + \frac{5}{3}$$

$$p = \frac{-6 + 5}{3}$$

$$p = \frac{-1}{3}$$

و بالتالي فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) هي : $y = \frac{-5}{3}x - \frac{1}{3}$

2- شرط توازي مستقيمين

خاصية

ليكن (D) و (D') مستقيمين بحيث:

$$(D) := ax+b \quad \text{و} \quad (D') := a'x+b'$$

إذا كان $a=a'$ فإن $(D') \parallel (D)$

إذا كان $a=a'$ فإن $(D') \parallel (D)$

مثال

لدينا المستقيمين (D) و (D') متوازيان بحيث (D) معرف بالمعادلة $y = \frac{1}{2}x + 3$ و (D') يمر من النقطة

$$A(2;-1)$$

لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (D')

لدينا $(D) \parallel (D')$ إذن $a=a' = \frac{1}{2}$ وبالتالي فإن معادلة المستقيم $y = \frac{1}{2}x + b'$

و بما أن المستقيم يمر من A فإن $y_A = \frac{1}{2}x_A + b'$
 إذن المعادلة المختصرة لـ (D') $y = \frac{1}{2}x - 2$

3- شرط تعامد مستقيمين

خاصية

ليكن (D) و (D') مستقيمان بحيث:
 (D) : $ax+b$ و (D') : $a'x+b'$
 إذا كان $a \times a' = -1$ فإن $(D) \perp (D')$
 إذا كان $(D) \perp (D')$ فإن $a \times a' = -1$

مثال

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستقيم (D) معادلته المختصرة هي :

$$(D) : y = 2x - 1$$

لنحدد معادلة المستقيم (Δ) المار من النقطة $A(-1; 2)$ و الموازي للمستقيم (D)

لدينا المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي : $(\Delta) : y = mx + p$

بما أن $(\Delta) \perp (D)$ فإن :

$$m \times 2 = -1$$

$$m = \frac{-1}{2}$$

$$\text{إذن : } (\Delta) : y = \frac{-1}{2}x + p$$

بما أن $A \in (\Delta)$ فإن :

$$2 = \frac{-1}{2} \times (-1) + p$$

$$2 = \frac{1}{2} + p$$

$$p = 2 - \frac{1}{2}$$

$$p = \frac{3}{2}$$

و بالتالي فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي : $(\Delta) : y = \frac{-1}{2}x + \frac{3}{2}$

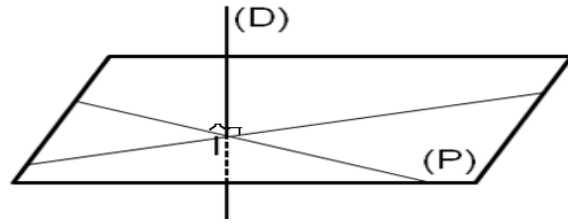
الهندسة الفضائية

1- تعامد مستقيم ومستوى

خاصية 1

يكون مستقيم (D) عموديا على مستوى (P) في النقطة I .
إذا كان عموديا في النقطة I على مستقيمين من (P) متقاطعين في I

مثال

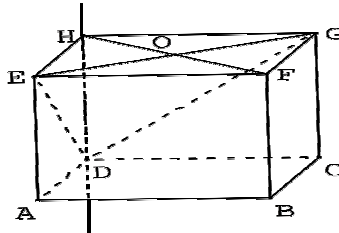


المستقيم (D) عمودي على المستوى (P)

خاصية 2

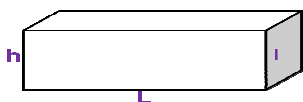
إذا كان (D) مستقيم عموديا على مستوى (P)، فإن (D) يكون عموديا على جميع المستقيمات الموجودة ضمن (P) .

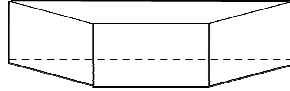
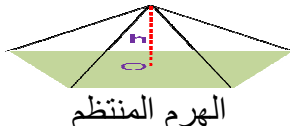
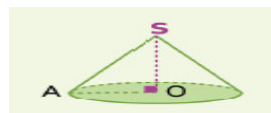
مثال 2



المستقيم (HD) عمودي على (EHG) في H اذن عمودي على جميع المستقيمات المارة من H التي تنتمي للمستوى (EHG)

2- الحجوم

الحجم	المجسم
$V = L \times l \times h$	 متوازي المستطيلات
$V = a^3$	

	المكعب
$V = \pi \times R^2 \times h$	 الأسطوانة
$V = B \times h$ B : مساحة القاعدة h : الارتفاع	 الموشور القائم
B : مساحة القاعدة h : الارتفاع $V = \frac{1}{3} \times B \times h$	 الهرم المنتظم
$V = \frac{\pi \times OA^2 \times SO}{3}$	 المخروط الدوراني

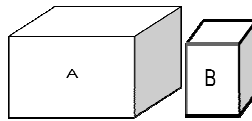
3- التكبير والتصغير

خاصية

عند تكبير أو تصغير مجسم في الفضاء إذا ضربنا الأطوال في عدد موجب K فإن :

- المساحات تضرب في k^2 .
- الحجم يضرب في K^3 .

مثال



المكعب A طول حرفه هو 8cm والمكعب B هو تصغير للمكعب A بنسبة $\frac{1}{4}$

$$v_B = \frac{1}{64} v_A$$

$$v_B = \left(\frac{1}{4}\right)^3 v_A$$

$$v_B = \frac{512}{64} = 8 \text{ cm}^3 \quad \text{إذن} \quad v_A = 8 \times 8 \times 8 = 512 \text{ cm}^3 \quad \text{لدينا}$$

الإحصاء

1- تذكير

تعريف

السكانة الإحصائية هي المجموعة التي تخضع لعملية الإحصاء و كل عنصر منها يسمى فردا أو وحدة إحصائية
الميزة هي الظاهرة المدروسة
الحصيص هو عدد الوحدات التي تأخذها كل قيمة من قيم الميزة
الحصيص المتراكم لقيمة من قيم الميزة هو مجموعة حصيصات القيم التي تصغر أو تساوي هذه القيمة
التردد المتراكم الموافق لقيمة من قيم الميزة هو نسبة الحصيص المتراكم الموافق لهذه القيمة و الحصيص الإجمالي .
المعدل الحسابي (أو القيمة المتوسطة) لمتسلسلة إحصائية هي : خارج مجموع جداءات قيم الميزة (له بالرمز m أو مراكز الأصناف) في الحصيصات الموافقة لها على الحصيص الإجمالي ويرمز

مثال

15	12	10	8	5	النقطة على 20 (الميزة)
1	2	7	7	3	عدد التلاميذ (الحصيص)
20	19	17	10	3	الحصيص المتراكم
0,05	0,1	0,35	0,35	0,15	التردد
1	0,95	0,85	0,50	0,15	التردد المتراكم

المعدل الحسابي :

$$m = \frac{5 \times 3 + 8 \times 7 + 10 \times 7 + 12 \times 2 + 15 \times 1}{20}$$

$$m = \frac{15 + 56 + 70 + 24 + 15}{20}$$

$$m = \frac{180}{20}$$

$$m = 9$$

إذن المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية هو: 9

2- القيمة الوسطية

تعريف

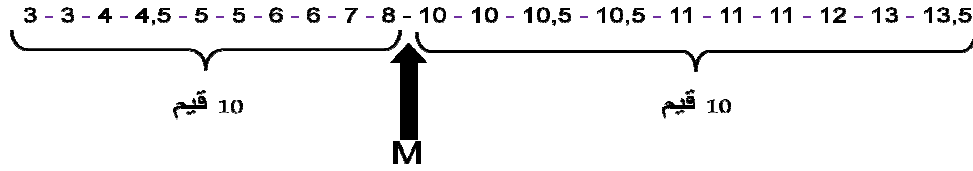
نقول إن عددا حقيقيا M قيمة وسطية لمتسلسلة إحصائية S يعني أن: نصف وحدات السكان على الأقل تأخذ فيها الميزة قيمة أصغر أو تساوي M و نصف وحدات السكان على الأقل تأخذ فيها الميزة قيمة أكبر أو تساوي M .

مثال 1

نعتبر الكشف التالي هو جرد لنقط تلاميذ قسم من الأقسام في مادة الرياضيات:

3 - 3 - 4 - 4,5 - 5 - 5 - 6 - 6 - 7 - 8

10 - 10 - 10,5 - 10,5 - 11 - 11 - 11 - 12 - 13 - 13,5



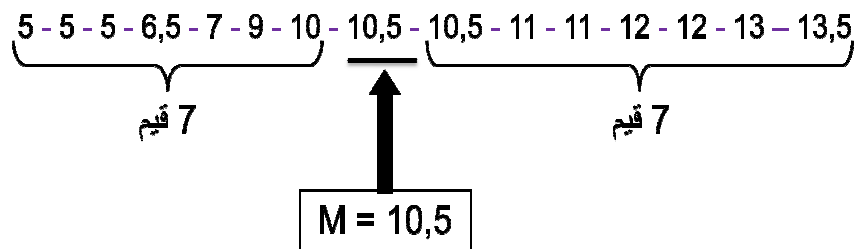
$$M = (8 + 10) : 2 = 9$$

M هي القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة

مثال 2

نعتبر الكشف التالي هو جرد لنقط تلاميذ قسم من الأقسام في مادة الرياضيات:

5 - 5 - 5 - 6,5 - 7 - 9 - 10 - 10,5 - 10,5 - 11 - 11 - 12 - 12 - 13 - 13,5



3- المنوال

تعريف

منوال متسلسلة إحصائية هو كل قيمة (أو صنف) للميزة لها أكبر حصيص

مثال

10	7	5	4	قيم الميزة
3	10	2	5	الحصيص

منوال هذه المتسلسلة الإحصائية هو الميزة 7 لأن لها أكبر حصيص هو 10

4- التشتت

تعريف

نعتبر متسلسلتين الإحصائيتين S1 و S2 لهما نفس المعدل الحسابي m . نقول إن S1 أقل تشتتاً من S2 يعني أن قيم ميزة S1 أقرب إلى m من قيم ميزة S2 .

مثال

في الجدول التالي نقط كل من أحمد وخالد في اربعة فروض

نقط احمد	10.5	10	12	11.5
نقط خالد	7	15	17	5

المعدل الحسابي للمتسلسلة الإحصائية الأولى :

$$\frac{10,5+10+12+11,5}{4} = 11$$

المعدل الحسابي للمتسلسلة الإحصائية الثانية :

$$\frac{7+15+17+5}{4} = 11$$

المتسلسلتان لهما نفس المعدل الحسابي 11 و نقط أحمد قريبة من المعدل الحسابي، نقول أن نقط أحمد أقل تشتتاً حول المعدل الحسابي من نقط خالد.