

دالة اللوغاريتم

I- دالة اللوغاريتم النيبيري

1- تذكير

- نعلم أن كل دالة متصلة على مجال I تقبل دوال أصلية على I

- نعلم أن لكل r من $\mathbb{Q} - \{-1\}$ الدالة $x \rightarrow x^r$ تقبل دوال أصلية على $]0; +\infty[$ هي $x \rightarrow \frac{x^{r+1}}{r+1} + k$ حيث k عدد حقيقي ثابت

*- في الحالة التي تكون $r = -1$ نحصل على الدالة $x \rightarrow \frac{1}{x}$ المتصلة على $]0; +\infty[$ ومنه تقبل دوال أصلية

وبالتالي الدالة $x \rightarrow \frac{1}{x}$ تقبل دالة أصلية وحيدة تنعدم في 1.

2- تعريف

الدالة الأصلية لدالة $x \rightarrow \frac{1}{x}$ على $]0; +\infty[$ التي تنعدم في النقطة 1 تسمى دالة اللوغاريتم النيبيري و يرمز لها بالرمز $\ln$ أو Log

$$\begin{cases} x > 0 \\ f'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = \ln(x) \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

3- خاصيات

أ- خاصيات

*- مجموعة تعريف الدالة $\ln$ هي $]0; +\infty[$ $\ln(1)=0$

*- الدالة $\ln$ متصلة على $]0; +\infty[$

*- الدالة $\ln$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x \in]0; +\infty[$

*- الدالة $\ln$ تزايدية قطعاً على $]0; +\infty[$

نتائج

لكل عددين حقيقيين موجبين قطعاً x و y
 $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
 $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$

ملاحظة

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

تمارين 1- حدد مجموعة تعريف الدالتين $f : x \rightarrow \ln(x-1) + \ln(4-x)$ و $g : x \rightarrow \ln(x^2 - 3x)$

2- حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين $\ln(x^2 + 2x) = 0$ و $\ln(x^2 - 3) = \ln(2x)$

3- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين $\ln(x^2 - x - 2) < 0$ و $\ln(x^2 - 2x) \leq \ln(x)$

ب- خاصية أساسية

نشاط

ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين قطعاً و F دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ بـ $F(x) = \ln(ax)$

1- بين أن $F'(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x \in]0; +\infty[$ و استنتج أن F دالة أصلية لدالة $x \rightarrow \frac{1}{x}$ على $]0; +\infty[$

2- بين أن $F(x) = \ln(ax) = \ln a + \ln x$ $\forall x \in]0; +\infty[$ ثم استنتج $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

الجواب

1- لدينا $F(x) = \ln \circ u(x)$ حيث $u(x) = ax$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad F'(x) = u'(x) \times (\ln)'(u(x)) = a \cdot \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$$

ومنه F دالة أصلية لدالة $x \rightarrow \frac{1}{x}$ على $]0; +\infty[$

2- لدينا F و $x \rightarrow \ln x$ دالتان أصليتان لدالة $x \rightarrow \frac{1}{x}$ على $]0; +\infty[$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad F(x) = k + \ln x \quad \text{اذن}$$

$$\text{لدينا } F(1) = \ln(a) \quad \text{و} \quad F(1) = k \quad \text{ومنه } k = \ln a$$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad F(x) = \ln(ax) = \ln a + \ln x \quad \text{اذن}$$

بوضع $x = b$ نحصل على $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

خاصية أساسية

$$\forall (a; b) \in (]0; +\infty[)^2 \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

ج- خاصيات

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

$$\forall (x; y) \in]0; +\infty[^2 \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$\forall (x_1; x_2; \dots; x_n) \in]0; +\infty[^n \quad \ln(x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n) = \ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n$$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall r \in \mathbb{Q}^* \quad \ln x^r = r \ln x$$

البرهان

$$\ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln 1 \Leftrightarrow \ln x + \ln \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{1}{x} = -\ln x \quad \diamond$$

$$\ln x^r = \ln(\underbrace{x \times x \times \dots \times x}_r \text{ facteurs}) = \underbrace{\ln x + \ln x + \dots + \ln x}_r \text{ termes} = r \ln x \quad \text{فان } r \in \mathbb{N}^* \quad \diamond$$

$$\ln x^r = \ln x^{-n} = \ln \frac{1}{x^n} = -\ln x^n = -n \ln x = r \ln x \quad \text{ومنه } r = -n \quad \text{فإننا نضع } r \in \mathbb{Z}_-^*$$

$$\text{إذا كان } \frac{p}{q} = r \quad / \quad p \in \mathbb{Z}^* \quad q \in \mathbb{N}^* \quad \text{نعلم أن } x^p = y^q \Leftrightarrow y = x^{\frac{p}{q}}$$

$$\text{ومنه } \ln x^p = \ln y^q \quad \text{و بالتالي } p \ln x = q \ln y \quad \text{أي } \ln y = \frac{p}{q} \ln x \quad \text{اذن } \ln x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \ln x$$

$$\text{أي } \ln x^r = r \ln x$$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x \quad \text{حالة خاصة}$$

تمرين هل الدالتان f و g متساويتين في الحالتين التاليتين

$$(a) \quad f(x) = \ln(x-1)^2 \quad g(x) = 2 \ln|x-1|$$

$$(b) \quad f(x) = \ln x (x-1) \quad g(x) = \ln x + \ln(x-1)$$

$$(1) \quad \text{أحسب } \ln \sqrt{\sqrt{2}+1} + \ln \sqrt{\sqrt{2}-1}$$

$$(2) \quad \text{أحسب قيمة مقربة لـ } \ln \sqrt{6} \quad \text{و } \ln \frac{2}{9} \quad \text{إذا علمت أن } \ln 2 \approx 0,7 \quad \ln 3 \approx 1,1$$

4- دراسة دالة ln

(a) دالة ln تزايدية قطعاً على $]0; +\infty[$

(b) مبرهنة 1 (نقبل) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

مبرهنة 2 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

البرهان نضع $x = \frac{1}{t}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\ln t = -\infty$

(c) العدد e

لدينا الدالة ln تزايدية قطعاً على $]0; +\infty[$ ومتصلة و $\ln(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$ و $\ln x = 1$ تقبل حلاً وحيداً في $]0; +\infty[$ ويرمز له بالحرف e اذن $\ln e = 1$
نقبل أن e ليس عدداً جذرياً و قيمته المقربة هي $e \approx 2,71828$

(d) جدول تغيرات الدالة ln

x	0	1	e	$+\infty$
f	$-\infty$	0	1	$+\infty$

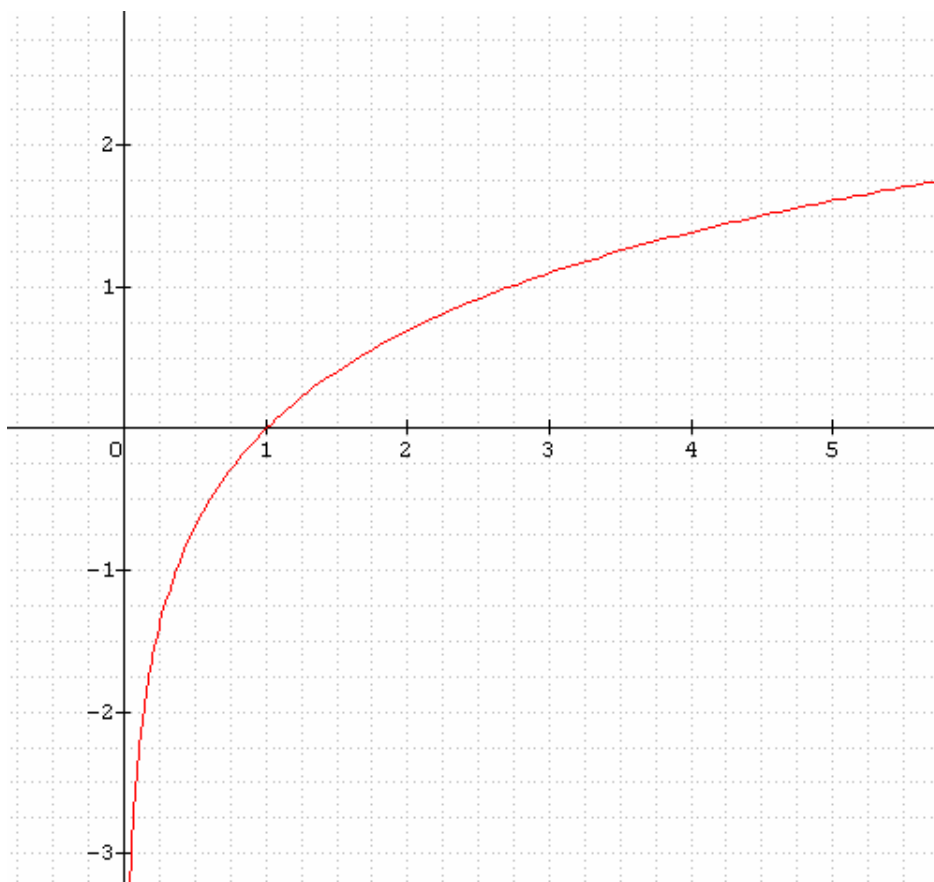
(e) الفروع اللانهائية بما أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ فان محور الارايب مقارب للمنحنى الممثل الدالة ln

مبرهنة $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

اذن المنحنى الممثل لدالة ln يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأفاصيل

(f) دراسة التقعر $(\ln)''(x) = -\frac{1}{x^2}$ اذن منحنى الدالة ln مقعر $\forall x \in]0; +\infty[$

(g) التمثيل المبياني



منحنى الدالة ln

(h) نهايات هامة أخرى خاصة

$$n \in \mathbb{N}^* \text{ حيث } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln(x^2 - x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x-2}{x}\right) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x \quad \text{حدد} \quad \text{تمرين}$$

5 - مشتقة الدالة اللوغاريتمية أ- مبرهنة

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و لا تنعدم على هذا المجال I

$$\forall x \in I \quad \left(\ln |u(x)| \right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

البرهان u لا تنعدم على I و منه u إما موجبة قطعاً على I أو سالبة قطعاً على I

إذا كانت u موجبة قطعاً على I فان $f(x) = \ln u(x)$ ومنه $f'(x) = u'(x) \ln' u(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

إذا كانت u سالبة قطعاً على I فان $f(x) = \ln(-u(x))$ ومنه

$$\forall x \in I \quad f'(x) = -u'(x) \ln'(-u(x)) = \frac{-u'(x)}{-u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

تمرين حدد مجموعة تعريف الدالة f و أحسب مشتقتها في الحالتين التاليتين

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x) \quad (b) \quad f(x) = \ln|x^2 - 4| \quad (a)$$

ب- تعريف

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و لا تنعدم على المجال I

الدالة $\frac{u'}{u}$ تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على المجال I

ج- نتيجة

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و لا تنعدم على المجال I

الدوال الأصلية لدالة $x \rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)}$ على I هي الدوال $x \rightarrow \ln|u(x)| + c$ حيث c عدد ثابت

تمرين 1 أوجد دالة أصلية لدالة f على المجال I في الحالات التالية

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{x+1} \\ I =]-1; +\infty[\end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = \tan(x) \\ I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x} \\ I =]2; +\infty[\end{cases}$$

تمرين 2 أحسب الدالة المشتقة لدالة f على $]-1; +\infty[$ حيث $f(x) = \frac{\sqrt{x^3+1}}{(x+2)^2}$

II- دالة اللوغاريتم للأساس a

1- تعريف

a عدد حقيقي موجب قطعاً و مخالف للعدد 1

الدالة $x \rightarrow \frac{\ln x}{\ln a}$ المعرفة على $]0; +\infty[$ تسمى دالة اللوغاريتم للأساس a ونرمز لها بالرمز Log_a

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \text{Log}_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

ملاحظات

*- دالة اللوغاريتم النيبيري هي دالة اللوغاريتم للأساس e $\text{Log}_e(x) = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$ $\forall x \in]0; +\infty[$

$$\forall a \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\} \quad \forall r \in \mathbb{Q} \quad \text{Log}_a(a) = 1 \quad \text{Log}_a(a^r) = r \quad \text{*-}$$

-2- خاصيات

بما أن لكل x من $]0; +\infty[$ حيث $\log_a(x) = k \ln x$ فان الدالة $\log_a$ تحقق جميع الخصائص التي تحققها الدالة $\ln$

$$\forall (x; y) \in (]0; +\infty[)^2 \quad \forall r \in \mathbb{Q} \quad \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \quad ; \quad \log_a(x^r) = r \log_a(x)$$

-3- دراسة دالة اللوغاريتم للأساس a

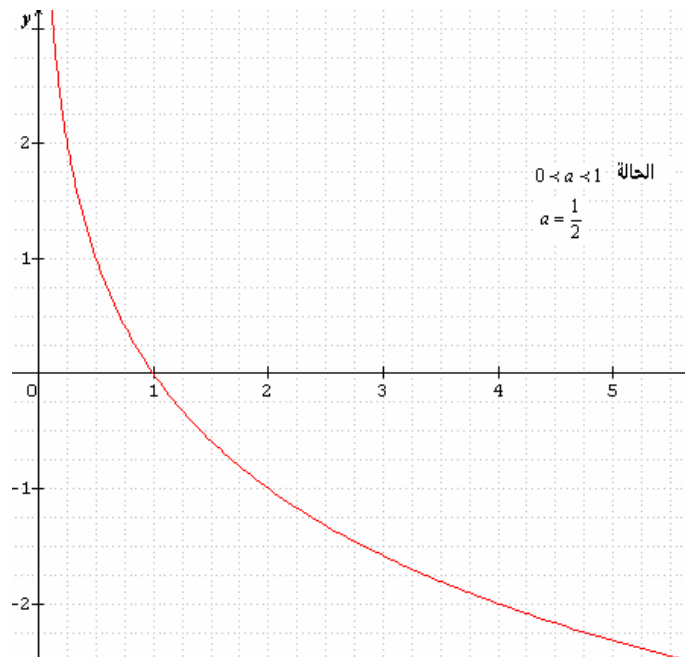
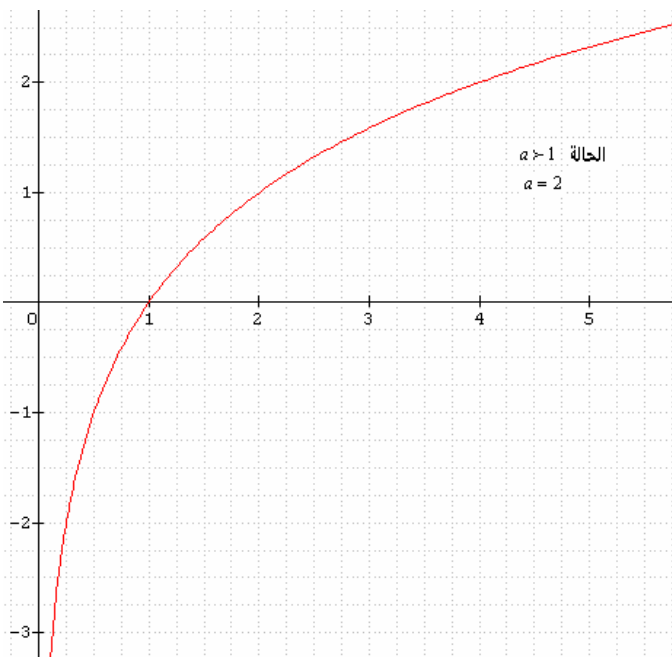
$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \log_a'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

*- إذا كان $0 < a < 1$ فان $\ln a < 0$ ومنه $\log_a' < 0$ إذن $\log_a$ تناقصية قطعاً على $]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$$

*- إذا كان $a > 1$ فان $\ln a > 0$ ومنه $\log_a' > 0$ إذن $\log_a$ تزايدية قطعاً على $]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$



-4- حالة خاصة اللوغاريتم العشري

تعريف

الدالة اللوغاريتمية التي أساسها 10 تسمى دالة اللوغاريتم العشري و يرمز لها بـ $\log$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \log x = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

ملاحظات

*- إذا وضعنا $M = \frac{1}{\ln 10}$ فاننا نحصل على $\log x = M \ln x$ $\forall x \in]0; +\infty[$ ($M \approx 0,434$)

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad \log 10^m = m \quad \text{*-}$$

1- تمرين أحسب $\log 0,01$ $\log 10000$

2- حل في $\mathbb{R}$ $\log(x-1) + \log(x+3) = 2$

3- حل في $\mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x + y = 65 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$