

الدالة الأسية

I- الدالة الأسية النيبيرية 1- تعاريف و خاصيات أولية

نعلم أن دالة $\ln$ تقابل من $]0; +\infty[$ نحو $\mathbb{R}$ و بالتالي تقبل دالة عكسية من $\mathbb{R}$ نحو $]0; +\infty[$

أ- تعريف

الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم النيبيري تسمى الدالة الأسية النيبيرية نرسم لها (مؤقتا) بالرمز $\exp$

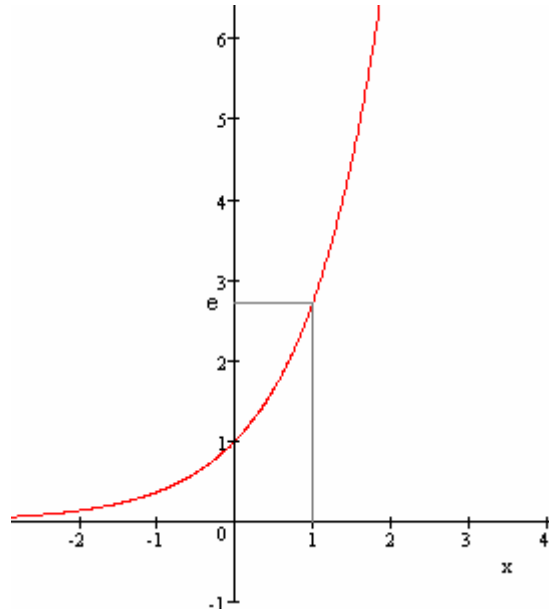
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0; +\infty[\quad \exp(x) = y \Leftrightarrow \ln y = x$$

ب- خاصيات أولية

$\exp(1) = e$	$\exp(0) = 1$	*
$\forall x \in \mathbb{R}$	$\exp(x) > 0$	*
$\forall x \in \mathbb{R}$	$\ln(\exp(x)) = x$	*
$\forall x \in]0; +\infty[$	$\exp(\ln(x)) = x$	*
الدالة $\exp$ تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$		*
$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2$	$\exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b$	*
$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2$	$\exp(a) > \exp(b) \Leftrightarrow a > b$	*

2- التمثيل المباني لدالة $\exp$

في معلم متعامد ممنظم منحني الدالة $\ln$ و منحني الدالة $\exp$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول



3- خاصية أساسية

$$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2 \quad \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

البرهان

$$\ln(\exp(a) \times \exp(b)) = \ln \exp(a) + \ln \exp(b) = a + b$$

$$\ln \exp(a+b) = a + b$$

$$\ln(\exp(a) \times \exp(b)) = \ln \exp(a+b)$$

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

$$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall r \in \mathbb{Q} \quad \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$$

$$\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} \quad \exp(ra) = [\exp(a)]^r$$

4- كتابة جديدة لدالة exp نعلم أن $\exp(1) = e$ وبالتالي $\forall r \in \mathbb{Q} \quad \exp(r) = [\exp(1)]^r = e^r$

نمدد هذه الكتابة إلى $\mathbb{R}$ أي $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) = e^x$

الخصائص السابقة تصبح

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0; +\infty[\quad e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln e^x = x \quad \forall x \in]0; +\infty[\quad e^{\ln x} = x$$

$$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall r \in \mathbb{Q} \quad e^{a+b} = e^a \cdot e^b \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad e^{rb} = (e^a)^r$$

$$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2 \quad e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

$$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2 \quad e^a = e^b \Leftrightarrow a \succ b$$

تمرين

1- حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$; $e^{x-2} = 2$

2- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين $e^{3x+1} - 3e^{2x+1} + e^{x+1} < 0$; $e^{x^2-x} > 1$

1/ نحل المعادلة $e^{x-2} = 2$

$$e^{x-2} = 2 \Leftrightarrow x-2 = \ln 2 \Leftrightarrow x = 2 + \ln 2 \quad \text{اذن} \quad S = \{2 + \ln 2\}$$

نحل المعادلة $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

$$t \in \mathbb{R}^{+*} \quad t^2 - 3t + 2 = 0 \quad \text{نضع} \quad e^x = t \quad \text{المعادلة تصبح}$$

لدينا $\Delta = 1$ ومنه $t = 1$ أو $t = 2$

وبالتالي $e^x = 1$ أو $e^x = 2$

ومنه $x = 0$ أو $x = \ln 2$

$$S = \{0; \ln 2\}$$

2/ نحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $e^{x^2-x} > 1$

$$e^{x^2-x} > 1 \Leftrightarrow x^2 - x > 0$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x^2 - x$		+	0	-

$$S =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[\quad \text{اذن}$$

نحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $e^{3x+1} - 3e^{2x+1} + e^{x+1} < 0$

$$e^{3x+1} - 3e^{2x+1} + e^{x+1} < 0 \Leftrightarrow e^{x+1} (e^{2x} - 3e^x + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x + 1 < 0$$

نضع $e^x = t$

$$t \in \mathbb{R}^{+*} \quad t^2 - 3t + 2 < 0 \quad \text{المتراجحة تصبح}$$

t	0	1	2	$+\infty$
$t^2 - 3t + 2$		+	0	- 0 +

و منه $t \in \mathbb{R}^{+*} \quad t^2 - 3t + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 2$

و بالتالي $1 < e^x < 2$ ومنه $0 < x < \ln 2$

إذن $S =]0; \ln 2[$

5- مشتقة الدالة الأسية النيبيرية

أ- بما أن دالة $\ln$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و مشتقتها لا تنعدم على $]0; +\infty[$ فإن الدالة الأسية قابلة

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' = \frac{1}{\ln'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x \quad \text{و} \quad \mathbb{R} \quad \text{للاشتقاق على}$$

خاصية

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' = e^x \quad \text{و} \quad \mathbb{R} \quad \text{الدالة } x \rightarrow e^x \text{ قابلة للاشتقاق على}$$

ب- خاصية

إذا كانت u قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \rightarrow e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I

$$\forall x \in I \quad [e^{u(x)}]' = u'(x) e^{u(x)}$$

أمثلة

حدد الدالة المشتقة للدالة f في الحالتين التاليتين

$$(a) \quad f(x) = e^{3x^2 - x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (3x^2 - x)' e^{3x^2 - x} = (6x - 1) e^{3x^2 - x}$$

$$(b) \quad f(x) = e^{x - x \ln x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (x - x \ln x)' e^{x - x \ln x} = (1 - \ln x - 1) e^{x - x \ln x} = (-\ln x) e^{x - x \ln x}$$

6- نهايات هامة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{نبين}$$

نضع $t = e^x$ ومنه $x = \ln t$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{\ln t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\ln t}{t}} = +\infty \quad \text{فان} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{e^x} - 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

تمرين

الجواب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{e^x} = 0 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{e^x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \quad \text{و بالتالي} \quad x = \frac{1}{t} \quad \text{ومنه} \quad t = \frac{1}{x} \quad \text{نضع}$$

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x}$$

تمرين أدرس و مثل مبيانيا الدالتين f و g حيث $f(x) = \frac{e^x}{x}$

II- الدالة الأسية للأساس a

1- تعريف

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعيا و مخالفا للعدد 1
الدالة العكسية للدالة Log_a تسمى الدالة الأسية للأساس a و يرمز لها بالرمز $\exp_a$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0; +\infty[\quad \exp_a(x) = y \Leftrightarrow \text{Log}_a(y) = x$$

ملاحظة

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0; +\infty[\quad \exp_a(x) = y \Leftrightarrow \text{Log}_a(y) = x \Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a} \Leftrightarrow \ln y = x \ln a \Leftrightarrow y = e^{x \ln a}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a(x) = e^{x \ln a} \quad \text{اذن}$$

(هذا يعني أن دالة $\exp_a$ هي تركيب الدالة الخطية $x \rightarrow x \ln a$ و الدالة الأسية النيبيرية)

2- خاصيات

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall r \in \mathbb{Q} \quad \exp_a(x + y) = \exp_a(x) \times \exp_a(y) \quad \exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}$$

$$\exp_a(x - y) = \frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)} \quad \exp_a(rx) = (\exp_a(x))^r$$

3- كتابة أخرى للعدد $\exp_a$

$$\forall a \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\} \quad \exp_a(1) = a \quad (\text{Log}_a(a) = 1)$$

$$\forall r \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\} \quad \exp_a(r) = [\exp_a(1)]^r = a^r$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a(x) = a^x \quad \text{فنكتب} \quad \text{نمدد هذه الكتابة الى } \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0; +\infty[\quad a^x = y \Leftrightarrow x = \text{Log}_a(y)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\} \quad a^x = e^{x \ln a}$$

دراسة الدالة $x \rightarrow a^x$

$$a \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\} \quad \text{ليكن}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (a^x)' = a^x \ln a \quad \text{و} \quad \text{الدالة } x \rightarrow a^x \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R}$$

الحالة 1 اذا كان $a > 1$ فان $\ln a > 0$ ومنه الدالة $x \rightarrow a^x$ تزايدية قطعيا على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

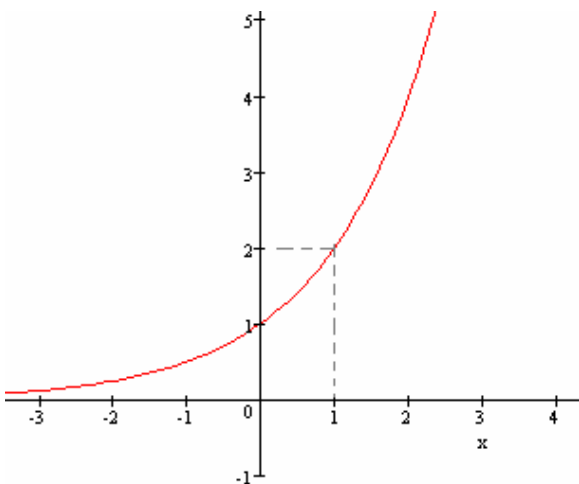
الحالة 2 اذا كان $0 < a < 1$ فان $\ln a < 0$

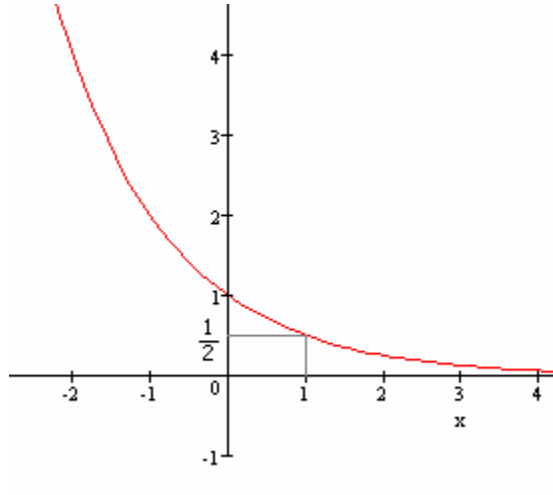
ومنه الدالة $x \rightarrow a^x$ تناقصية قطعيا على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

التمثيل المبياني

$$(a = 2) \quad a > 1$$





$$\left(a = \frac{1}{2}\right) \quad 0 < a < 1$$

ملاحظة نلاحظ $1^x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ و بالتالي نكتب $a^x = e^{x \ln a} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R}^{+*}$
