حلول التمارين

الترتيب و العمليات

المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي

من إعداد الأستاذ : المهدي عنيس

تمرين ① :

1) لنقارن ما يلي :

✠ $\frac{-7}{18}$ و $\frac{-5}{9}$:

لدينا : $\frac{-7}{18}-\frac{-5}{9}=\frac{-7}{18}-\frac{-10}{18}=\frac{-7+10}{18}=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$.

إذن : بما أن : $\frac{1}{6}\geq 0$ فإن : $\frac{-7}{18}-\frac{-5}{9}\geq 0$. و منه فإن : $\boxed{\frac{-7}{18}\geq\frac{-5}{9}}$.

✠ $-\sqrt{2}+\frac{1}{2}$ و $-\sqrt{2}$:

لدينا : $\frac{1}{2}\geq 0$ يعني أن : $-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\geq 0+\left(-\sqrt{2}\right)$ و منه فإن : $\boxed{-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\geq-\sqrt{2}}$.

✠ $\frac{12}{5}+3^{2012}$ و $\frac{3}{7}+3^{2012}$:

لدينا : $\frac{12}{5}-\frac{3}{7}=\frac{84}{35}-\frac{15}{35}=\frac{69}{35}$.

إذن : بما أن : $\frac{69}{35}\geq 0$ فإن : $\frac{12}{5}-\frac{3}{7}\geq 0$ و منه فإن : $\frac{12}{5}\geq\frac{3}{7}$ و بالتالي فإن : $\boxed{\frac{12}{5}+3^{2012}\geq\frac{3}{7}+3^{2012}}$.

✠ $2\sqrt{7}\times\frac{11}{25}$ و $2\sqrt{7}\times\frac{18}{5}$:

لدينا : $\frac{11}{25}-\frac{18}{5}=\frac{11}{25}-\frac{90}{25}=\frac{-79}{25}$.

إذن : بما أن : $\frac{-79}{25}\leq 0$ فإن : $\frac{11}{25}-\frac{18}{5}\leq 0$ و منه فإن : $\frac{11}{25}\leq\frac{18}{5}$.

و بما أن : $2\sqrt{7}>0$ فإن : $\boxed{\frac{11}{25}\times 2\sqrt{7}\leq\frac{18}{5}\times 2\sqrt{7}}$.

✠ $-\sqrt{3}\times\frac{13}{7}$ و $-\sqrt{3}\times\frac{11}{2}$:

لدينا : $\frac{13}{7}-\frac{11}{2}=\frac{26}{14}-\frac{77}{14}=\frac{-51}{14}$.

إذن : بما أن : $\frac{-51}{14}\leq 0$ فإن : $\frac{13}{7}-\frac{11}{2}\leq 0$ و منه فإن : $\frac{13}{7}\leq\frac{11}{2}$.

و بما أن : $-\sqrt{3}<0$ فإن : $\boxed{-\sqrt{3}\times\frac{13}{7}\geq-\sqrt{3}\times\frac{11}{2}}$.

2) – x و y عددان حقيقيان بحيث : $x>0$ و $y<0$.

✠ لنقارن : $x+y$ و $y-x$:

لدينا : $(x+y)-(y-x)=x+y-y+x=2x$.

و بما أن : $x>0$ فإن $2x>0$ و منه فإن : $(x+y)-(y-x)>0$ و بالتالي فإن : $\boxed{x+y>y-x}$.

✠ لنقارن : $3y+x$ و $4y+x$:

لدينا : $(3y+x)-(4y+x)=3y+x-4y-x=-y$.

و بما أن : $y<0$ فإن : $-y>0$ و منه فإن : $(3y+x)-(4y+x)>0$ و بالتالي فإن : $\boxed{3y+x>4y+x}$.

3) – قارن العددين الحقيقيين a و b بحيث : $a=\sqrt{12}+\sqrt{27}$ و $b=\sqrt{48}$:

لدينا : $\sqrt{12}+\sqrt{27}=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$ و $\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

و بما أن : $5\sqrt{3}\geq 4\sqrt{3}$ فإن : $\sqrt{12}+\sqrt{27}\geq\sqrt{48}$ و بالتالي فإن : $\boxed{a\geq b}$.

تمرين ② :

1) – لنقارن بين ما يلي :

✠ $3\sqrt{7}$ و $2\sqrt{17}$:

لدينا : $\left(3\sqrt{7}\right)^2=63$ و $\left(2\sqrt{17}\right)=68$.

إذن : $\left(3\sqrt{7}\right)^2\leq\left(2\sqrt{17}\right)^2$ و بما أن : و $\left.\begin{matrix}3\sqrt{7}>0\\2\sqrt{17}>0\end{matrix}\right\}$ فإن : $\boxed{3\sqrt{7}\leq 2\sqrt{17}}$.

✠ $-5\sqrt{5}$ و $-3\sqrt{11}$:

لدينا : $\left(-5\sqrt{5}\right)^2=125$ و $\left(-3\sqrt{11}\right)^2=99$.

إذن : $\left(-5\sqrt{5}\right)^2\geq\left(-3\sqrt{11}\right)^2$ و بما أن : و $\left.\begin{matrix}-5\sqrt{5}<0\\-3\sqrt{11}<0\end{matrix}\right\}$ فإن : $\boxed{-5\sqrt{5}\leq -3\sqrt{11}}$.

✠ $\sqrt{3}-\sqrt{17}$ و $3\sqrt{5}$:

لدينا : $3\sqrt{5}>0$.

*/ لنحدد إشارة $\sqrt{3}-\sqrt{17}$.

لدينا : و $\left.\begin{matrix}\sqrt{3}^2=3\\\sqrt{17}^2=17\end{matrix}\right\}$ إذن : $\sqrt{3}^2<\sqrt{17}^2$ و بما أن : و $\left.\begin{matrix}\sqrt{3}>0\\\sqrt{17}>0\end{matrix}\right\}$ فإن : $\sqrt{3}\leq\sqrt{17}$ و منه فإن : $\sqrt{3}-\sqrt{17}<0$

بما أن : و $\left.\begin{matrix}\sqrt{3}-\sqrt{17}<0\\3\sqrt{5}>0\end{matrix}\right\}$ فإن : $\boxed{\sqrt{3}-\sqrt{17}<3\sqrt{5}}$.

✠ $\sqrt{3}+2$ و $\sqrt{7+2\sqrt{11}}$:

لدينا : $\left(\sqrt{3}+2\right)^2=\sqrt{3}^2+2\times\sqrt{3}\times 2+2^2=3+4\sqrt{3}+4=7+4\sqrt{3}$ و $\left(\sqrt{7+2\sqrt{11}}\right)^2=7+2\sqrt{11}$.

*/ لنقارن : $4\sqrt{3}$ و $2\sqrt{11}$:

لدينا : و $\left.\begin{array}{l}\left(4\sqrt{3}\right)^2 = 48\\ \left(2\sqrt{11}\right)^2 = 44\end{array}\right\}$ إذن : $\left(4\sqrt{3}\right)^2 \geq \left(2\sqrt{11}\right)^2$ و بما أن : و $\left.\begin{array}{l}4\sqrt{3} > 0\\ 2\sqrt{11} > 0\end{array}\right\}$ فإن : $4\sqrt{3} \geq 2\sqrt{11}$.

و منه فإن : $7 + 4\sqrt{3} \geq 7 + 2\sqrt{11}$ أي $\left(\sqrt{3}+2\right)^2 \geq \left(\sqrt{7+\sqrt{11}}\right)^2$

و بما أن : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{3}+2 > 0\\ \sqrt{7+\sqrt{11}} > 0\end{array}\right\}$ فإن : $\boxed{\sqrt{3}+2 \geq \sqrt{7+\sqrt{11}}}$.

2) – a و b عددان حقيقيان موجبان بحيث : $a \leq b$.

أ) -- ✠ لنثبت أن : $a+1 \leq b + \dfrac{5}{4}$.

لدينا : $5 > 4$ ، إذن : $1 \leq \dfrac{5}{4}$ و بما أن : $a \leq b$ فإن : $\boxed{a+1 \leq b+\dfrac{5}{4}}$.

✠ لنثبت أن : $b+\sqrt{7} \geq a - 3\sqrt{7}$.

لدينا : $\sqrt{7} \geq -3\sqrt{7}$ و بما أن : $b \geq a$ فإن : $b+\sqrt{7} \geq a + \left(-3\sqrt{7}\right)$ أي : $\boxed{b+\sqrt{7} \geq a-3\sqrt{7}}$.

ب) -- لنقارن العددين : $\dfrac{a^2+3b^2}{4}$ و b^2 .

لدينا : $\dfrac{a^2+3b^2}{4} - b^2 = \dfrac{a^2+3b^2}{4} - \dfrac{4b^2}{4} = \dfrac{a^2+3b^2-4b^2}{4} = \dfrac{a^2-b^2}{4}$.

و بما أن : $a \leq b$ فإن : $a^2 \leq b^2$ و منه فإن : $a^2 - b^2 \leq 0$ ، و بما أن $4 \geq 0$ فإن : $\dfrac{a^2-b^2}{4} \leq 0$

و منه فإن : $\dfrac{a^2+3b^2}{4} - b^2 \leq 0$ و بالتالي فإن : $\boxed{\dfrac{a^2+3b^2}{4} \leq b^2}$.

3) – a و b و c أعداد حقيقية موجبة .

أ) -- لنثبت أن : $a^2+b^2 \geq 2ab$.

لدينا : $\left(a^2+b^2\right) - 2ab = a^2+b^2-2ab = a^2-2ab+b^2 = \left(a-b\right)^2$.

و بما أن : $\left(a-b\right)^2 \geq 0$ فإن : $\left(a^2+b^2\right) - 2ab \geq 0$ و بالتالي فإن : $a^2+b^2 \geq 2ab$.

ب) -- لنستنتج أن : $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$.

لدين من خلال ما سبق أن : $\left.\begin{array}{l}a^2+b^2 \geq 2ab\\ b^2+c^2 \geq 2bc\\ a^2+c^2 \geq 2ac\end{array}\right\}$ و منه فإن : $\left(a^2+b^2\right)+\left(b^2+c^2\right)+\left(a^2+c^2\right) \geq 2ab+2bc+2ac$

أي : $a^2+b^2+b^2+c^2+a^2+c^2 \geq 2\left(ab+bc+ac\right)$ و منه فإن : $2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2\left(ab+bc+ac\right)$

إذن : $2\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 2\left(ab+bc+ac\right)$ و منه فإن : $a^2+b^2+c^2 = \dfrac{2\left(ab+bc+ac\right)}{2}$

و بالتالي فإن : $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$.

ج) -- علما أن : $a^2+b^2+c^2=1$ لنبين أن : $(a+b+c)^2=1+2(ab+bc+ac)$.

لدينا :

$$(a+b+c)^2=\left[(a+b)+c\right]^2=(a+b)^2+2\times(a+b)\times c+c^2$$
$$=(a+b)^2+2c(a+b)+c^2$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$
$$=\left(a^2+b^2+c^2\right)+2(ab+bc+ac)$$
$$=1+2(ab+bc+ac)$$

إذن : $\boxed{(a+b+c)^2=1+2(ab+bc+ac)}$.

د) -- لنستنتج من ما سبق أن : $a+b+c\leq\sqrt{3}$.

نعلم أن : و $\left.\begin{matrix} a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac \\ a^2+b^2+c^2=1 \end{matrix}\right\}$ ، إذن : $1\geq ab+bc+ac$. (1)

و بما أن : $(a+b+c)^2=1+2(ab+bc+ac)$ فإن : $ab+bc+ac=\dfrac{(a+b+c)^2-1}{2}$. (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن : $1\geq\dfrac{(a+b+c)^2-1}{2}$ أي : $\dfrac{(a+b+c)^2-1}{2}\leq 1$ ،

و منه فإن : $(a+b+c)^2-1\leq 2$ يعني أن : $(a+b+c)^2\leq 2+1$ أي : $(a+b+c)^2\leq 3$

و بالتالي فإن : $\sqrt{(a+b+c)^2}\leq\sqrt{3}$ أي : $\boxed{a+b+c\leq\sqrt{3}}$.

❀ تمرين ③ :

1) – لنبين أن : $x-y=\dfrac{\sqrt{3}-7}{2}$.

لدينا :

$$x-y=\frac{2}{\sqrt{3}+1}-\frac{5+\sqrt{3}}{2}=\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}-\frac{5+\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}^2-1^2}-\frac{5+\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}-2}{3-1}-\frac{5+\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}-2}{2}-\frac{5+\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}-2-5-\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-7}{2}$$

2) – أ) -- لنقارن العددين : $\sqrt{3}$ و 7 .

لدينا : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{3}^2=3\\ 7^2=49\end{array}\right\}$ ، إذن : $\sqrt{3}^2 \le 7^2$ و بما أن : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{3}>0\\ 7>0\end{array}\right\}$ فإن : $\boxed{\sqrt{3}\ \le\ 7}$.

ب) -- لنستنتج مقارنة x و y :

لدينا : $\sqrt{3}\le 7$ يعني أن : $\sqrt{3}-7\le 0$ و منه فإن : $\dfrac{\sqrt{3}-7}{2}\le 0$ أي : $x-y\ \le\ 0$

و بالتالي فإن : $\boxed{x\ \le\ y}$.

❀ تمرين ④ :

1)–أ) -- ✠ لنقارن العددين : $\sqrt{7}$ و 2 .

لدينا : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{7}^2=7\\ 2^2=4\end{array}\right\}$ إذن : $\sqrt{7}^2\ \ge\ 2^2$ ، و بما أن : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{7}>0\\ 2>0\end{array}\right\}$ فإن : $\boxed{\sqrt{7}\ge 2}$.

✠ لنقارن العددين : $\sqrt{3}$ و 5 .

لدينا : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{3}^2=3\\ 5^2=25\end{array}\right\}$ إذن : $\sqrt{3}^2\le 5^2$ ، و بما أن : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{3}>0\\ 5>0\end{array}\right\}$ فإن : $\boxed{\sqrt{3}\le 5}$.

ب) -- لنستنتج تبسيط العددين : $m=\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2}$ و $n=\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2}$.

نعلم أن : $\sqrt{7}\ge 2$ يعني : $\sqrt{7}-2\ge 0$ و منه فإن : $\boxed{m\ =\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2}=\sqrt{7}-2}$.

و نعلم أن : $\sqrt{3}\le 5$ يعني أن : $\sqrt{3}-1\le 0$ و منه فإن : $\boxed{n=\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2}\ =\ 5-\sqrt{3}}$.

2) – أ) -- أنشر و بسط العددين : $\left(\sqrt{5}-4\right)^2$ و $\left(6-\sqrt{2}\right)^2$.

لدينا : و

$$\left.\begin{array}{l}\left(\sqrt{5}-4\right)^2=\sqrt{5}^2-2\times4\times\sqrt{5}+4^2=5-8\sqrt{5}+16=21-8\sqrt{5}\\ \left(6-\sqrt{2}\right)^2=6^2-2\times6\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2=36-12\sqrt{2}+2=38-12\sqrt{2}\end{array}\right\}.$$

ب) -- ✠ لنستنتج تبسيطا للعدد : $v=\sqrt{21-8\sqrt{5}}$.

لدينا : $\left(\sqrt{5}-4\right)^2=21-8\sqrt{5}$ يعني أن : $v=\sqrt{21-8\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-4\right)^2}$.

*/ لنحدد إشارة : $\sqrt{5}-4$.

لدينا : $\left.\begin{array}{l}\sqrt{5}^2=5\\ 4^2=16\end{array}\right\}$ ، إذن : $\sqrt{5}^2\le 4^2$ و بما أن : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{5}>0\\ 4>0\end{array}\right\}$ فإن : $\sqrt{5}\le 4$ و منه : $\boxed{\sqrt{5}-4\le 0}$.

و بالتالي فإن : $\boxed{v=\sqrt{21-8\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-4\right)^2}=4-\sqrt{5}}$.

✠ لنستنتج تبسيطا للعدد : $w=\sqrt{38-12\sqrt{2}}$.

لدينا : $\left(6-\sqrt{2}\right)^2=38-12\sqrt{2}$ يعني أن : $w=\sqrt{38-12\sqrt{2}}=\sqrt{\left(6-\sqrt{2}\right)^2}$.

*/ لنحدد إشارة : $6-\sqrt{2}$.

لدينا : $\left.\begin{array}{l}6^2=36\\ \sqrt{2}^2=2\end{array}\right\}$ ، إذن : $6^2\geq\sqrt{2}^2$ و بما أن : و $\left.\begin{array}{l}6>0\\ \sqrt{2}>0\end{array}\right\}$ فإن : $6\geq\sqrt{2}$ و منه فإن : $\boxed{6-\sqrt{2}\geq 0}$.

و بالتالي فإن : $\boxed{w=\sqrt{38-12\sqrt{2}}=\sqrt{\left(6-\sqrt{2}\right)^2}=6-\sqrt{2}}$.

❀ تمرين ⑤ :

1) – ✠ لنثبت أن : $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

لدينا : $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2}=\frac{1\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

✠ لنثبت أن : $\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}+1}$.

لدينا : $\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{3-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}^2-1^2}=\frac{1\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}+1}$.

2) – أ) -- لنقارن العددين : $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}+1$.

لدينا : $\left.\begin{array}{l}\sqrt{5}^2=5\\ 1^2=1\end{array}\right\}$ ، إذن : $\sqrt{5}^2\geq 1^2$ و بما أن : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{5}>0\\ 1>0\end{array}\right\}$ فإن : $\sqrt{5}\geq 1$ و منه فإن : $\boxed{\sqrt{5}+\sqrt{3}\geq\sqrt{3}+1}$.

ب) -- لنستنتج مقارنة العددين : $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

نعلم أن : $\sqrt{5}+\sqrt{3}\geq\sqrt{3}+1$ يعني أن : $\frac{1}{\sqrt{3}+1}\leq\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ و بما أن : و $\left.\begin{array}{l}\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\\ \frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}+1}\end{array}\right\}$ فإن :

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}-1}{2}\leq\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}}$$

❀ تمرين ⑥ :

1) – لنبين أن : $\frac{2}{3}\leq c\leq 1$.

لدينا : $\frac{1}{2}\leq\frac{3c-1}{2}\leq 1$ يعني أن : $\frac{1}{2}\times 2\leq\frac{3c-1}{2}\times 2\leq 1\times 2$ و منه فإن : $1\leq 3c-1\leq 2$

إذن : $1+1\leq 3c-1+1\leq 2+1$ أي : $2\leq 3c\leq 3$ و منه فإن : $2\times\frac{1}{3}\leq 3c\times\frac{1}{3}\leq 3\times\frac{1}{3}$ و بالتالي فإن : $\boxed{\frac{2}{3}\leq c\leq 1}$.

2) – ✠ لنؤطر $a+b$:

لدينا : و $\left.\begin{matrix} 9\le a\le 16 \\ -7\le b\le -6 \end{matrix}\right\}$ ، إذن : $9-7\le a+b\le 16-6$ و منه فإن : $\boxed{2\le a+b\le 10}$.

✠ لنؤطر ab :

لدينا : و $\left.\begin{matrix} 9\le a\le 16 \\ 6\le -b\le 7 \end{matrix}\right\}$ ، إذن : $9\times 6\le a\times(-b)\le 16\times 7$ أي : $54\le -ab\le 112$ و منه فإن : $\boxed{-112\le ab\le -54}$.

✠ لنؤطر $\dfrac{a}{b}$:

لدينا : و $\left.\begin{matrix} 9\le a\le 16 \\ \dfrac{1}{7}\le \dfrac{1}{-b}\le \dfrac{1}{6} \end{matrix}\right\}$ ، إذن : $9\times\dfrac{1}{7}\le a\times\dfrac{1}{-b}\le 16\times\dfrac{1}{6}$ أي : $\dfrac{9}{7}\le\dfrac{a}{-b}\le\dfrac{16}{6}$

و منه فإن : $\dfrac{9}{7}\le\dfrac{a}{-b}\le\dfrac{8}{3}$ و بالتالي فإن : $\boxed{-\dfrac{8}{3}\le\dfrac{a}{b}\le-\dfrac{9}{7}}$.

✠ لنؤطر $-3a+2b-15$:

لدينا : و $\left.\begin{matrix} 9\le a\le 16 \\ -7\le b\le -6 \end{matrix}\right\}$ ، إذن : $\left.\begin{matrix} -3\times 16\le -3a\le -3\times 9 \\ 2\times(-7)\le 2b\le 2\times(-6) \end{matrix}\right\}$ أي : $\left.\begin{matrix} -48\le -3a\le -27 \\ -14\le 2b\le -12 \end{matrix}\right\}$

و منه فإن : $-48-14-15\le -3a+2b-15\le -27-12-15$ و بالتالي فإن : $\boxed{-77\le -3a+2b-15\le -54}$.

✠ لنؤطر $2\sqrt{a}+d$:

لدينا : و $\left.\begin{matrix} 9\le a\le 16 \\ -2\le d\le -1 \end{matrix}\right\}$ ، إذن : و $\left.\begin{matrix} \sqrt{9}\le\sqrt{a}\le\sqrt{16} \\ -2\le d\le -1 \end{matrix}\right\}$ أي : و $\left.\begin{matrix} 3\le\sqrt{a}\le 4 \\ -2\le d\le -1 \end{matrix}\right\}$ و منه فإن : $3-2\le\sqrt{a}+d\le 4-1$

و بالتالي فإن : $\boxed{1\le\sqrt{a}+d\le 3}$.

✠ لنؤطر a^2+bd-b^2 :

لدينا : و $\left.\begin{matrix} 9\le a\le 16 \\ 6\le -b\le 7 \\ 1\le -d\le 2 \end{matrix}\right\}$ ، إذن : و $\left.\begin{matrix} 81\le a^2\le 256 \\ -49\le -b^2\le -36 \\ 6\le bd\le 14 \end{matrix}\right\}$ و منه فإن : $81+6-49\le a^2+bd-b^2\le 256+14-36$

و بالتالي فإن : $\boxed{38\le a^2+bd-b^2\le 234}$.

✠ لنؤطر $\dfrac{2b-d}{a+b}$: نضع : $\dfrac{2b-d}{a+b}=(2b-d)\times\dfrac{1}{a+b}$.

لدينا : و $\left.\begin{matrix} -7\le b\le -6 \\ -2\le d\le -1 \end{matrix}\right\}$ ، إذن : و $\left.\begin{matrix} -14\le 2b\le -12 \\ 1\le -d\le 2 \end{matrix}\right\}$ و منه فإن : $-14+1\le 2b-d\le -12+2$ أي : $\boxed{-13\le 2b-d\le -10}$

نعلم أن : $2 \le a+b \le 10$ ، إذن : $\boxed{\dfrac{1}{10} \le \dfrac{1}{a+b} \le \dfrac{1}{2}}$.

لدينا : و $\left.\begin{array}{r} -13 \le 2b-d \le -10 \\ \dfrac{1}{10} \le \dfrac{1}{a+b} \le \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$ ، إذن : $\left.\begin{array}{r} 10 \le -\left(2b-d\right) \le 13 \\ \dfrac{1}{10} \le \dfrac{1}{a+b} \le \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$ ومنه فإن : $10 \times \dfrac{1}{10} \le -\left(2b-d\right) \times \dfrac{1}{a+b} \le 13 \times \dfrac{1}{2}$

أي : $1 \le -\dfrac{2b-d}{a+b} \le \dfrac{13}{2}$ و بالتالي فإن : $\boxed{-\dfrac{13}{2} \le \dfrac{2b-d}{a+b} \le -1}$.

لنؤطر $\sqrt{a^2-ab+b^2}$:

لدينا : و $\left.\begin{array}{r} 9 \le a \le 16 \\ -7 \le b \le -6 \end{array}\right\}$ ، إذن : و $\left.\begin{array}{r} 81 \le a^2 \le 256 \\ -112 \le ab \le -54 \\ (-6)^2 \le b^2 \le (-7)^2 \end{array}\right\}$ و منه فإن : $\left.\begin{array}{r} 81 \le a^2 \le 256 \\ 54 \le -ab \le 112 \\ 36 \le b^2 \le 49 \end{array}\right\}$

إذن : $81+54+36 \le a^2-ab+b^2 \le 256+112+49$ و منه فإن : $171 \le a^2-ab+b^2 \le 417$.

و بالتالي فإن : $\sqrt{171} \le \sqrt{a^2-ab+b^2} \le \sqrt{417}$ أي : $\boxed{3\sqrt{19} \le \sqrt{a^2-ab+b^2} \le \sqrt{417}}$